1. 다음 등식을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x-y$의 값을 구하면?

$$(1+2i)x+(1+i)y=1+3i$$

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$(x+y)+(2x+y)i=1+3i$

$x+y=1,\ 2x+y=3$

$x=2,\ y=-1$

2. $x = 2 - \sqrt{3}i$, $y = 2 + \sqrt{3}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2 - \sqrt{3}i)^2 + (2 + \sqrt{3}i)^2 \\ &= 4 - 4\sqrt{3}i - 3 + 4 + 4\sqrt{3}i - 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\ &= 4^2 - 2 \cdot 7 \\ &= 16 - 14 \\ &= 2 \end{aligned}$$

3. $i+2i^2+3i^3+\cdots+50i^{50}$ 의 값은?

① $-26-25i$ ② $-26+25i$ ③ 0
④ $-25+26i$ ⑤ $25+26i$

해설

$i+2i^2+3i^3+\cdots+50i^{50}$
$=\{i+2\cdot(-1)+3\cdot(-i)+4\cdot 1\}+\{5i+6\cdot(-1)+7\cdot(-i)+8\cdot 1\}+\cdots+\{45i+46\cdot(-1)+47\cdot(-i)+48\cdot 1\}+49i+50\cdot(-1)$
$12(2-2i)+49i-50=-26+25i$

4. $z = 1 - i$ 일 때, $\frac{\overline{z}-1}{z} - \frac{z-1}{\overline{z}}$ 의 값은?

① $-i$　② i　③ $-2i$　④ $2i$　⑤ 1

해설

$z = 1 - i, \overline{z} = 1 + i$

$\therefore$ (준식) $= \frac{i}{1-i} - \frac{-i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i$

5. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \boxed{\text{㉠}} \frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\ &= \boxed{\text{㉡}} \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\ &= \boxed{\text{㉢}} \frac{\sqrt{-16}}{2} \\ &= \boxed{\text{㉣}} \frac{4i}{2} \\ &= \boxed{\text{㉤}} = \sqrt{-4} \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\sqrt{2}i = 2i^2 = -2$

따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.

6. 복소수 $z = (1+i)x^2 + x - (2+i)$가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 x의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -1 ② 1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 2

해설

복소수 z를 $a + bi$ (a, b는 실수) 의 꼴로 정리하면
$z = (x^2 + x - 2) + (x^2 - 1)i$
이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.
즉, $x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$
한편, $x = 1$이면 $z = 0 + 0i = 0$이므로
$z \neq 0$라는 조건에 맞지 않는다.
$\therefore\ x = -1$

7. 복소수 $(1+i)x^2-(1-4i)x-(2-3i)$가 실수일 때의 x값과 순허수일 때의 x값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면
$(x^2-x-2)+(x^2+4x+3)i$
실수가 되기위해서는 $x^2+4x+3=0$
$(x+1)(x+3)=0 \therefore\ x=-3,\ -1$
순허수가 되기 위해서는
$x^2-x-2=0$이고 $x^2+4x+3\neq 0$
$x=-1,\ 2$이고 $x\neq -3,\ -1 \therefore\ x=2$
$(-3)\times(-1)\times 2=6$

8. $z=\dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$ 일 때, $z^4-\bar{z}$ 의 값을 구하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① $\sqrt{3}i$　　② $-\sqrt{3}i$　　③ $2\sqrt{3}i$

④ $-2\sqrt{3}i$　　⑤ 1

해설

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{-2}{1+\sqrt{3}i} \\
&= \frac{-2(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} \\
&= \frac{-2(1-\sqrt{3}i)}{4} \\
&= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}
\end{aligned}
$$

$\therefore\ 2z+1=\sqrt{3}i\cdots$①

①의 양변을 제곱하여 정리하면

$4z^2+4z+1=-3 \Leftrightarrow z^2+z+1=0\cdots$②

②의 양변에 $z-1$을 곱해주면

$(z-1)(z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow z^3=1$

$\therefore\ z^3=1$ 이므로 $z^4=z$

$$
\begin{aligned}
\therefore z^4-\bar{z} &= z-\bar{z} \\
&= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\
&= \sqrt{3}i
\end{aligned}
$$

9. $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$) 일 때, $\alpha^t = b + ai$라 한다. $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$ 을 간단히 하면?

① $1+i$　　② $1-i$　　③ $2+i$

④ $2-i$　　⑤ $\sqrt{3}+i$

해설

$\alpha = a + bi,\ \alpha^t = b + ai$이므로

$\alpha\alpha^t = (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$

그런데 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = a + bi$에서

$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$　　$\therefore\ \alpha\alpha^t = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\right)i = i$

$\therefore$ (준식)$= 2\alpha(\alpha\cdot\alpha^t)^4 = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\cdot i^4 = \sqrt{3}+i$

10. 복소수 z가 $z+|z|=2+8i$를 만족시킬 때, $|z|^2$의 값은? (단, $z=a+bi$ (a, b는 실수)일 때, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 이다.)

① 68　② 100　③ 169　④ 208　⑤ 289

해설

$z=a+bi$라 놓자.

$z+|z|=2+8i$,

$a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=2+8i$

$a+\sqrt{a^2+b^2}=2, \quad b=8$

$a+\sqrt{a^2+64}=2$

$\sqrt{a^2+64}=2-a$ 양변제곱하면,

$a^2+64=(2-a)^2=a^2-4a+4$

$4a=-60$, $a=-15$

$\therefore \ |z|^2=a^2+b^2=225+64=289$