1. 두 점 A(-4), B(6) 사이의 거리를 구하여라.

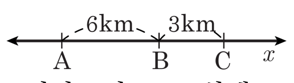
▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\overline{\mathrm{AB}} = |6 - (-4)| = 10$

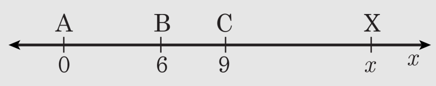
2. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6 km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3 km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?



① 6 km ② 9 km ③ 12 km ④ 15 km ⑤ 18 km

해설

그림과 같이 A마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X라 하면



A(0), B(6), C(9), X(x)
A마을과 X마을 사이의 거리는
C마을과 X마을 사이의 거리의 2배이므로
$|x-0| = 2|x-9|$
곧, $|x| = 2|x-9|$
$\therefore\ 2(x-9) = \pm x$
$\therefore\ x = 6$ 또는 $x = 18$
여기서 $x = 6$이면 X = B가 되므로 성립하지 않는다.
따라서 $x = 18$
이 때, X마을과 B마을 사이의 거리는 $18 - 6 = 12$(km)

3. 다음은 좌표평면 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대한 설명이다.

㉠ 점 A와 점 B는 x축 위에 있다.
㉡ 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.
㉢ $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{AD}=\overline{CD}$

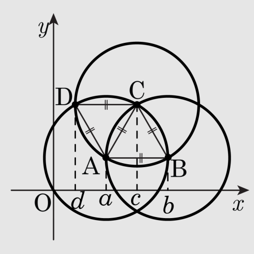
점 A,B, C, D의 x좌표를 각각 a, b, c, d라 할 때, 옳은 것은?

① $a<d<c<b$ ② $c<a<d<b$ ③ $c<d<a<b$

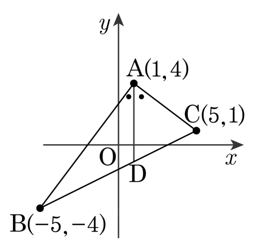
④ $d<a<c<b$ ⑤ $d<c<a<b$

해설

그림에서 알 수 있듯이 점 A, B, C, D에 대하여 각각의 x좌표 a, b, c, d의 크기는 $d<a<c<b$



4. 다음 그림과 같이 세점 $A(1,4)$, $B(-5,-4)$, $C(5,1)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?



① $1:1$　② $\sqrt{2}:1$　③ $\sqrt{3}:1$

④ $2:1$　⑤ $\sqrt{5}:1$

해설

두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD} : \overline{CD}$ 이고
각의 이등분선정리에 의해
$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$
$\overline{AB}=\sqrt{(1+5)^2+(4+4)^2}=\sqrt{100}=10$
$\overline{AC}=\sqrt{(1-5)^2+(4-1)^2}=\sqrt{25}=5$
$\therefore\ \triangle ABC : \triangle ACD = 2 : 1$

5. 두 점 $A(-2,-3)$, $B(-5,4)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① $(0,-2)$　② $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　③ $(0,1)$
④ $(0,2)$　⑤ $\left(0,\frac{14}{3}\right)$

해설

P의 좌표를 $(0,\alpha)$라 하면
$\overline{AP}=\overline{BP}$이므로
$\sqrt{(0-(-2))^2+(\alpha-(-3))^2}$
$=\sqrt{(0-(-5))^2+(\alpha-4))^2}$, $\alpha=2$
$\therefore\ P=(0,2)$

6. 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 4)$, $\mathrm{B}(2,\ 6)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점 Q의 좌표는?

① $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$
② $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$
③ $\mathrm{P}\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$
④ $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{7}{4}\right)$
⑤ $\mathrm{P}\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{15}{2}\right)$

해설

P의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ 0)$라 하면
$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$ 이므로
$\sqrt{(a+3)^2+(-4)^2} = \sqrt{(a-2)^2+(-6)^2}$
Q의 좌표를 $\mathrm{Q}(0,\ b)$라 하면
$\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{BQ}}$에서
$\sqrt{3^2+(b-4)^2} = \sqrt{(-2)^2+(b-6)^2}$
두 식을 제곱하여 정리하면 $a = \frac{3}{2},\ b = \frac{15}{4}$
$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ 0\right),\ \mathrm{Q}\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$

7. 두 점 A$(-5,\ 1)$, B$(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 $y=-x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ ② $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$ ③ $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$
④ $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$

해설

구하는 점을 $\mathrm{P}(a,\ -a)$라 하면 $(\because\ y=-x)$
$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$
$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$
$(a+5)^2+(a+1)^2=(a-4)^2+(a+5)^2$
$\Rightarrow a=\frac{3}{2}$
$\therefore\ \mathrm{P}(a,-a)=\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$

8. 직선 $y = x + 2$ 위의 점 P는 두 점 A$(-2, 0)$, B$(4, -2)$로부터 같은 거리에 있다고 할 때, 점 P의 좌표는?

① $(-1, 1)$ ② $(0, 2)$ ③ $(1, 3)$
④ $(2, 4)$ ⑤ $(3, 5)$

해설

P가 $y = x + 2$ 위에 있으므로 P$(a,\ a+2)$라고 놓을 수 있다.
$\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$이므로
$\sqrt{(a+2)^2 + (a+2)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + (a+4)^2}$
$2(a+2)^2 = (a-4)^2 + (a+4)^2$
$8a = 24$
$\therefore\ a = 3$
$\therefore$ P$(3,\ 5)$

9. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a,3)$, $\mathrm{B}(-1,-5)$, $\mathrm{C}(3,7)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 $\angle\mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

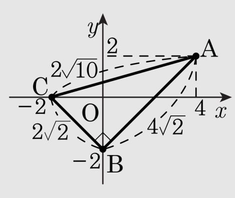
해설

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a,3)$, $\mathrm{B}(-1,-5)$, $\mathrm{C}(3,7)$에 대하여
$\overline{\mathrm{AB}}^2=(-1-a)^2+(-5-3)^2=a^2+2a+65$
$\overline{\mathrm{CA}}^2=(a-3)^2+(3-7)^2=a^2-6a+25$
$\overline{\mathrm{BC}}^2=(3+1)^2+(7+5)^2=160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2-4a+90=160$
$\therefore\ a^2-2a-35=0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

10. 세 점 $A(4,\ 2)$, $B(0,\ -2)$, $C(-2, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② 둔각삼각형
③ $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형
④ $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형
⑤ $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형

해설



$\triangle ABC$ 의 세변의 길이를 구하면
$\overline{AB}$
$= \sqrt{(0-4)^2 + (-2-2)^2}$
$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
$\overline{BC} = \sqrt{(-2-0)^2 + \{0-(-2)\}^2} =$
$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
$\overline{CA} = \sqrt{\{4-(-2)\}^2 + (2-0)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
따라서 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 이므로
$\triangle ABC$ 는 $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형이다.

11. 세 점 $A(6,1)$, $B(-1,2)$, $C(2,3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하면?

① $O(1,-2)$ ② $O(2,\ 2)$ ③ $O(2,-2)$
④ $O(2,-1)$ ⑤ $O(1,-1)$

해설

외심의 좌표를 $O(a,b)$라 하면
$\overline{OA}=\overline{OB}$ 즉, $\overline{OA}^2=\overline{OB}^2$ 이므로
$(a-6)^2+(b-1)^2=(a+1)^2+(b-2)^2$
$\therefore\ 7a-b=16\cdots\cdots$ ㉠
$\overline{OA}=\overline{OC}$, 즉 $\overline{OA}^2=\overline{OC}^2$ 이므로
$(a-6)^2+(b-1)^2=(a-2)^2+(b-3)^2$
$\therefore\ 2a-b=6\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=-2$
$\therefore O(2,-2)$

12. 세 꼭짓점이 A(1, 3), B(p, 3), C(1, q)인 $\triangle$ABC의 외심의 좌표가 (2, 1)일 때 pq의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $pq = -3$

해설

$(2-1)^2+(1-3)^2=(2-p)^2+(1-3)^2$에서 $(p-2)^2=1$

$\therefore\ p=1,\ 3$

그런데 $p=1$일 때 점 A, B가 일치하므로 $p\neq 1$ $\therefore\ p=3$

$(2-1)^2+(1-3)^2=(2-1)^2+(1-q)^2$에서 $(q-1)^2=4$

$\therefore\ q=3,\ -1$

그런데 $q=3$일 때 점 A, C가 일치하므로 $q\neq 3$

$\therefore\ pq=3\times(-1)=-3$

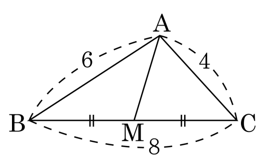
13. 세 점 A(5, 0), B(0, 3), C(0, -3)을 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC의 외심의 좌표는?

① $O\left(\frac{5}{8},\ 0\right)$　　② $O\left(\frac{8}{5},\ 0\right)$　　③ $O\left(0,\ \frac{5}{8}\right)$
④ $O\left(0,\ \frac{8}{5}\right)$　　⑤ O(0, 0)

해설

두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) 사이의 거리
$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로
$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$, $\overline{BO} = \overline{CO}$ 에서
$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $y = 0 \cdots$ ①
$\overline{AO} = \overline{BO}$ 에서
$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $10x - 6y = 16$
즉 $5x - 3y = 8 \cdots$ ②
①과 ②에서 $x = \frac{8}{5}$, $y = 0$
따라서 외심의 좌표는 $O\left(\frac{8}{5},\ 0\right)$이다.

14. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

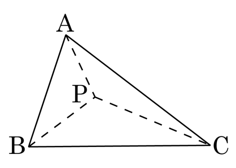
중선정리에 의하여
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

$36+16=2\overline{AM}^2+32$

$\therefore \overline{AM}^2=10$

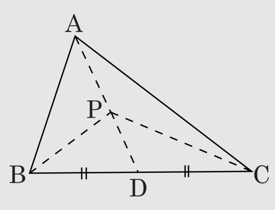
15. 다음 그림과 같이 $\triangle\mathrm{ABC}$의 내부에 넓이가 삼등분이 되도록 점 P를 잡았더니 $\overline{\mathrm{AP}}=4$, $\overline{\mathrm{BP}}=3$, $\overline{\mathrm{CP}}=5$가 되었다고 한다. 이때, 선분 BC의 길이는?



① $4\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{13}$

해설

$\triangle\mathrm{ABC}$의 내부에 넓이가 삼등분이 되는 점 P는 삼각형의 무게중심이다.
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}$의 연장선과 $\overline{\mathrm{BC}}$의 교점을 D라 하면



$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PD}} = 2 : 1$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PD}} = 2$

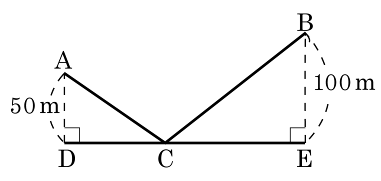
$\triangle\mathrm{PBC}$에서 중선 정리를 이용하면

$$\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2=2\left(\overline{\mathrm{PD}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2\right)$$

$$3^2+5^2=2\left(2^2+\overline{\mathrm{BD}}^2\right)$$

$$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{13},\ \overline{\mathrm{BC}}=2\cdot\overline{\mathrm{BD}}=2\sqrt{13}$$

16. 다음 그림과 같이 고압 전선 $\overline{\mathrm{DE}}$가 지나는 곳으로부터 각각 $50\,\mathrm{m}$, $100\,\mathrm{m}$ 떨어진 두 지점에 빌딩 A, B가 위치하고 있다. 변압기를 D와 E 사이의 한 지점에 설치하여 빌딩 A, B에 전력을 공급하려고 한다. D와 E 사이의 거리가 $200\,\mathrm{m}$일 때, 전체 전선의 길이 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}$의 최솟값을 구하여라.



▶ 답: ______ m

▷ 정답: 250 m

해설

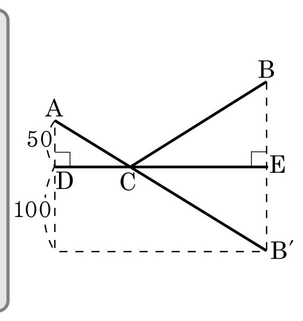
B를 $\overline{\mathrm{DE}}$에 대해 대칭이동한 점을 B′이라 하면

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CB'}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CB'}}\geq\overline{\mathrm{AB'}}$

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}$의 최솟값은

$\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{200^2+150^2}=250(\mathrm{m})$



17. 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{P}(0,b)$, $\mathrm{Q}(a,0)$, $\mathrm{B}(5,1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값을 k라 할 때, k^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

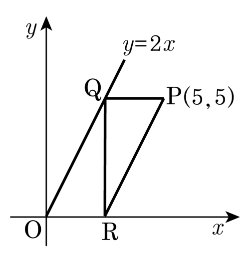
점 $\mathrm{A}\ (1,2)$의 y축에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{A}'(-1,2)$, 점 $\mathrm{B}(5,1)$의 x축에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{B}'(5,-1)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}$

$\geq \overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{(5+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{45}$

따라서 $k=\sqrt{45}$이므로 $k^2=45$

18. 다음 그림에서 점 $\mathrm{P}(5,5)$와 직선 $y=2x$ 위의 점 Q, x 축 위의 점 R 에 대하여 $\triangle\mathrm{PQR}$의 둘레의 길이의 최솟값은?



① $4\sqrt{10}$　② $8\sqrt{2}$　③ $5\sqrt{5}$

④ $2\sqrt{29}$　⑤ 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{RP}}$의 최솟값은 P를 $y=2x$에 대해 대칭시킨 P'와 x축에 대해 대칭이동시킨 $\mathrm{P}''(5,-5)$ 사이 거리와 같다.
$\mathrm{P}'=(a,b)$라하면 $\overline{\mathrm{PP}'}$은 $y=2x$에 수직이고
$\overline{\mathrm{PP}'}$의 중점은 $y=2x$ 위에 있다
$\therefore\ \mathrm{P}'=(1,\ 7)$
$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{PR}}\geq\overline{\mathrm{P'P''}}=\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}$

19. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답: ______ m

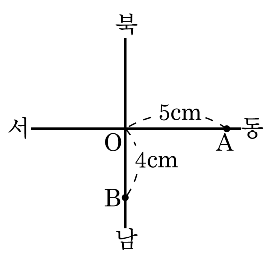
▷ 정답: 30 m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$

$\therefore\ a = 30(\mathrm{m})$

20. 다음의 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 5km, B는 남쪽으로 4km의 지점에 있다. A는 시속 4km로 서쪽으로, B는 시속 2km로 북쪽으로 향해서 동시에 출발했을 때, A와 B의 거리가 가장 짧을 때는 몇 시간 후인가?



① 1.4시간 후 ② 1.5시간 후 ③ 1.6시간 후

④ 1.7시간 후 ⑤ 1.8시간 후

해설

남북을 y 축, 동서를 x 축으로 하면 최초의 A, B의 위치의 좌표는 A(5, 0), B(0, -4) 이다. 이 때, t 시간 후의 A, B 의 자표는 A($5-4t$, 0), B(0, $-4+2t$) 로 나타낼 수 있다. 따라서 t 시간 후의 A, B사이의 거리 s 는$s = \sqrt{\{0-(5-4t)\}^2 + (-4+2t-0)^2}$

$= \sqrt{20t^2 - 56t + 41} = \sqrt{20\left(t - \frac{14}{10}\right)^2 + \frac{9}{5}}$

s 는 $t = \frac{14}{10}$ 일 때, 최솟값을 갖는다.