

1. 등식 $3x - 2yi = (2 + i)^2$ 이 성립하는 x, y 에 대하여 두 수를 곱하면?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$3x - 2yi = (2 + i)^2 = 3 + 4i$$

$$x = 1, \quad y = -2$$

$$\therefore xy = -2$$

2. $x = 3 + \sqrt{3}i$, $y = 3 - \sqrt{3}i$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 10 ③ 20 ④ -10 ⑤ -20

해설

$$\begin{aligned}x + y &= 6, \quad xy = 12 \\x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\&= 6^3 - 3 \cdot 12 \cdot 6 \\&= 0\end{aligned}$$

3. 방정식 $x^3 - x = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

▷ 정답 : $x = 0$

▷ 정답 : $x = 1$

해설

좌변을 인수분해 하면

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$$

$$\therefore x = -1, 0, 1$$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p, y=q$ 또는 $x=r, y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots \textcircled{A} \\ xy-y^2=6 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

①에서 $x=2y+1 \cdots \cdots \textcircled{C}$

②을 ②에 대입하여 정리하면

$$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$$

$$\therefore y=2, -3$$

$y=2, y=-3$ 을 ③에 대입하면

$$\text{각각 } x=5, x=-5$$

$$\therefore x=5, y=2 \text{ 또는 } x=-5, y=-3$$

5. 부등식 $ax - b^2 > bx + a^2 - 8$ 의 해가 모든 실수이기 위한 a 의 조건은?
(a, b 는 실수)

① $a = b$ 이고 $-1 < a < 1$

② $a = b$ 이고 $-2 < a < 2$

③ $a = b$ 이고 $-3 < a < 3$

④ $a = b$ 이고 $-4 < a < 4$

⑤ $a = b$ 이고 $-5 < a < 5$

해설

$ax - b^2 > bx + a^2 - 8$ 에서

$(a - b)x - b^2 - a^2 + 8 > 0$ 이 모든 x 에 대해서 성립해야 하므로

$a = b$

$\therefore -2a^2 + 8 > 0 \quad 2a^2 < 8$

$\therefore a^2 < 4$ 이므로 $-2 < a < 2$

즉 $a = b$ 이고 $-2 < a < 2$

6. 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$ 의 해가 $2 < x < 3$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$2 < x < 3$ 가 해이므로

$$(x - 2)(x - 3) < 0$$

$$x^2 - 5x + 6 < 0, a = -5, b = 6$$

$$\therefore a + b = 1$$

7. 복소수 $z = (1+i)x^2 + x - (2+i)$ 가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 x 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -1 ② 1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 2

해설

복소수 z 를 $a + bi$ (a, b 는 실수)의 꼴로 정리하면
 $z = (x^2 + x - 2) + (x^2 - 1)i$
이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.
즉, $x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$
한편, $x = 1$ 이면 $z = 0 + 0i = 0$ 이므로
 $z \neq 0$ 라는 조건에 맞지 않는다.
 $\therefore x = -1$

8. 포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$ 일 때, 모든 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 의 두 근이므로 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 2k, \alpha\beta = 2k + 3$
 $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{5}$ 에서 $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로
 $20 = (2k)^2 - 4(2k + 3), 4k^2 - 8k - 12 = 20$

$$k^2 - 2k - 8 = 0$$

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k 의 값의 합은 2이다.

9. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$$y = x^2 + (m - 1)x + m^2 + 1, \quad y = x + 1$$

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m 의 범위를 정하면?

- ① $m < -2, \quad m > \frac{2}{3}$

② $m < -1, \quad m > \frac{2}{3}$
- ③ $m < -2, \quad m > 2$

④ $m < 2, \quad m > \frac{2}{3}$
- ⑤ $m < -5, \quad m > \frac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m - 1)x + m^2 + 1 > x + 1$ 을 항상 만족하도록 m 을 정하면 된다.

$x^2 + (m - 2)x + m^2 > 0$ 에서
판별식 $D = (m - 2)^2 - 4m^2 < 0, (m - 2 + 2m)(m - 2 - 2m) < 0$
 $(3m - 2)(m + 2) > 0$

$\therefore m < -2, m > \frac{2}{3}$

(참고) $y = x^2 + (m - 1)x + m^2 + 1 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
 $y = x + 1 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
 $\textcircled{\text{㉡}}$ 의 그래프는 그 위치가 고정되어 있지만 $\textcircled{\text{㉠}}$ 의 그래프는 m 의 값이 변함에 따라 그 위치가 변한다.
이를테면 $m = 0, m = 1$ 일 경우에 대해서 생각해 보자.
(i) $m = 0$ 일 경우 $\textcircled{\text{㉠}}$ 은 $y = x^2 - x + 1$ 이므로
이 때에는 $\textcircled{\text{㉠}}$ 의 그래프가 $\textcircled{\text{㉡}}$ 의 그래프보다 위에 있는 x 의 범위는
부등식 $x^2 - x + 1 > x + 1$ 을 만족하는 x 의 범위와 같다.
(ii) $m = 1$ 일 경우 $\textcircled{\text{㉠}}$ 은 $y = x^2 + 2$ 이므로
이 때에는 $\textcircled{\text{㉠}}$ 의 그래프가 $\textcircled{\text{㉡}}$ 의 그래프보다 항상 위에 있으므로
 $\textcircled{\text{㉠}}$ 이 $\textcircled{\text{㉡}}$ 보다 항상 위에 있는 x 의 범위는 x 의 모든 실수값이다.
이 문제의 경우는 (ii) 같이 되도록 m 의 범위를 정하라는 것이다.
 $\textcircled{\text{㉠}}$ 의 그래프가 $\textcircled{\text{㉡}}$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면
 $x^2 + (m - 1)x + m^2 + 1 > x + 1$
곧, $x^2 + (m - 2)x + m^2 > 0$ 이 x 의 모든 실수값에 대하여 항상
성립하면 된다.
이 결과는 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 의 그래프가 만나지 않도록 m 의 범위를 정한
것과 같다.
그러나 일반적으로 직선과 포물선이 만나지 않는 경우에는 직선
이 포물선보다 항상 위쪽에 있는 경우도 있으므로
‘포물선이 직선보다 위쪽에 있다’는 것과 ‘포물선과 직선이
만나지 않는다’는 것과는 그 뜻이 다르다.

10. 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x + a$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값과 $f(f(x))$ 의 최솟값이 같게 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $a \leq 0$ ② $a \geq 0$ ③ $a \leq 1$ ④ $a \geq 1$ ⑤ $a \leq 2$

해설

$f(x) = x^2 + 2x + a = (x+1)^2 + a - 1$ 은

$x = -1$ 일 때 최솟값 $a - 1$ 을 갖는다.

$\therefore f(x) \geq a - 1$

$f(x) = t$ 라면

$f(f(x)) = f(t) = t^2 + 2t + a (t \geq a - 1)$

이때, 꼭짓점의 t 좌표 -1 이

$t \geq a - 1$ 에 포함되면

$f(t)$ 의 최솟값이 $f(-1) = a - 1$ 이 되어 최솟값과 같아진다.

즉, $-1 \geq a - 1 \quad \therefore a \leq 0$

11. a, b 가 유리수일 때, $x = 1 + \sqrt{2}$ 가 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ 의 근이 된다. 이 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

유리계수 방정식이므로 $1 + \sqrt{2}$ 가 근이면 $1 - \sqrt{2}$ 도 근이다.
주어진 방정식의 세 근을 $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, \alpha$ 라 하면
 $(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 3 \dots\dots\dots \textcircled{A}$
 $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + \alpha(1 + \sqrt{2}) + \alpha(1 - \sqrt{2}) = a \dots\dots\dots \textcircled{B}$
 $\alpha(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -b \dots\dots\dots \textcircled{C}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 1$

12. 사차방정식 $x^4 + x^3 - x - 1 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^{100} + \frac{1}{\beta^{100}}$ 과 값이 같은 것은?

- ① $\alpha + 1$ ② $\alpha - 2$ ③ $\frac{2}{\beta}$ ④ -1 ⑤ 1

해설

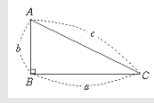
$$\begin{aligned} x^4 + x^3 - x - 1 &= 0 \\ x^3(x+1) - (x+1) &= 0 \\ (x+1)(x^3-1) &= 0 \\ \rightarrow (x+1)(x-1)(x^2+x+1) &= 0 \\ x^2+x+1=0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta & \\ \therefore \alpha^3=1, \beta^3=1, \alpha+\beta=-1, \alpha\beta=1 & \\ \alpha^{100} + \frac{1}{\beta^{100}} = (\alpha^3)^{33}\alpha + \frac{1}{(\beta^3)^{33}\beta} & \\ = \alpha + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha\beta+1}{\beta} = \frac{2}{\beta} & \end{aligned}$$

13. 넓이가 30 이고, 둘레의 길이가 30 인 직각삼각형의 빗변의 길이를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설



$$\frac{1}{2}ab = 30, ab = 60$$

$$a + b + c = 30, a + b = 30 - c$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (a + b)^2 - 2ab = c^2$$

$$(30 - c)^2 - 2 \cdot 60 = c^2$$

$$c^2 - 60c + 900 - 120 = c^2$$

$$60c = 780, \therefore c = 13$$

14. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

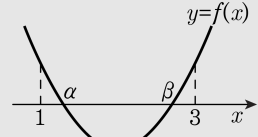
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a + 4)(a - 4) > 0$
 $\therefore a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$
 $f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \frac{13}{3}$
 $\therefore a < \frac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이
 $x = \frac{a}{2}$ 이므로 $1 < \frac{a}{2} < 3$
 $\therefore 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4, \beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

15. $x = -1 + i$ 일 때, $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$ 의 값을 구하면?

① $-1 + i$

② $-i$

③ i

④ -1

⑤ 1

해설

$$x = i - 1 \Rightarrow x + 1 = i$$

$$\text{양변을 제곱해서 정리하면 } x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$$

$$= x^2(x^2 + 2x + 2) - x^2 - x - 1$$

$$= -x^2 - x - 1 \quad (\because x^2 + 2x + 2 = 0)$$

$$= -(-2x - 2) - x - 1$$

$$= x + 1 = i$$

16. $a^2 - 3a + 1 = 0$ 일 때, $a^2 - 2a + \frac{3}{a^2 + 1}$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$a^2 - 3a + 1 = 0$ 에서

$$a^2 - 2a + \frac{3}{a^2 + 1} = a - 1 + \frac{3}{3a} = a + \frac{1}{a} - 1$$

한편, $a^2 - 3a + 1 = 0$ 의 양변을 a 로 나누면

$$a - 3 + \frac{1}{a} = 0 \quad \therefore a + \frac{1}{a} = 3$$

$$\therefore (\text{준식}) = \left(a + \frac{1}{a}\right) - 1 = 2$$

17. a, b, c 는 실수이고, $a > 0, ac - b^2 > 0, b \neq 0$ 이라 할 때, x 의 이차방정식 $x^2 - (a + c)x + ac - b^2 = 0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?
- ① 서로 다른 두 개의 음의 근 ② 서로 다른 두 개의 양의 근
③ 양의 중근 ④ 음의 중근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$x^2 - (a + c)x + ac - b^2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = (a + c)^2 - 4(ac - b^2)$
 $= (a - c)^2 + 4b^2 > 0 \cdots \textcircled{1} (\because b \neq 0)$
 $a > 0, ac > b^2 > 0$ 에서 $c > 0$ 이므로
(두 근의 곱) $= ac - b^2 > 0 \cdots \textcircled{2}$
(두 근의 합) $= a + c > 0 \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 양의 근을 가진다.

18. 연립부등식 $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases}$ 의 해는?

- ① $-2 \leq x < 3$ ② $-2 < x < 3$ ③ $2 \leq x < 3$
④ $2 < x \leq 3$ ⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

$x^2 - 2x + x - 2 \geq 0$ 에서
 $x^2(x-2) + (x-2) \geq 0$
 $\therefore (x-2)(x^2+1) \geq 0$
 $x^2+1 > 0$ 이므로 $x-2 \geq 0$
 $\therefore x \geq 2 \cdots (가)$
 $x^2 - x - 6 < 0$ 에서 $(x-3)(x+2) < 0$
 $\therefore -2 < x < 3 \cdots (나)$
따라서 (가), (나)의 공통 범위를 구하면
 $2 \leq x < 3$ 이다.

19. α 는 이차방정식 $ax^2 - 2ax + b = 0$ 의 근이고 β 는 이차방정식 $bx^2 - 2ax + a = 0$ 의 근이라고 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

β 가 방정식 $bx^2 - 2ax + a = 0$ 의 근이므로
 $b\beta^2 - 2a\beta + a = 0 \dots\dots \textcircled{1}$

$ax^2 - 2ax + b = 0$ 에 $x = \frac{1}{\beta}$ 를 대입하면,

$\textcircled{1}$ 에 의해서

$$a\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 - 2a\left(\frac{1}{\beta}\right) + b = \frac{1}{\beta^2}(b\beta^2 - 2a\beta + a) = 0$$

따라서, $x = \frac{1}{\beta}$ 은 방정식 $ax^2 - 2ax + b = 0$ 의 근이다.

그런데 α 도 이 방정식 $ax^2 - 2ax + b = 0$ 의 근이므로 방정식 $ax^2 - 2ax + b = 0$ 의 두 근은 α 와 $\frac{1}{\beta}$ 이다.

따라서, 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해서 $\alpha + \frac{1}{\beta} = 2$

20. $[x] = 1$, $[y] = 2$, $[z] = -1$ 일 때 $[x + 2y - z]$ 의 최대값과 최소값의
합은?

(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

- ① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

해설

$[x] = 1$, $[y] = 2$, $[z] = -1$ 에서
 $1 \leq x < 2$, $2 \leq y < 3$, $-1 \leq z < 0$
 $1 \leq x < 2$
 $4 \leq 2y < 6$
 $+ \underline{0 < -z \leq 1}$
 $5 < x + 2y - z < 9$
 $\therefore [x + 2y - z] = 5, 6, 7, 8$
최대값과 최소값의 합은 $5 + 8 = 13$