1. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = 2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0 이어야 한다.

$z = 2(k-i)-k(1+i)^2$

$= 2k-2i-2ki$

$= 2k-(2+2k)i$

허수 부분이 0이려면 $2+2k=0$ 이어야 한다.

따라서 $k=-1$

2. $x = 1 + 2i$, $y = \dfrac{1+2i}{1-i}$, $z = \dfrac{1-2i}{1-i}$ 일 때, $xy + xz$ 의 값을 구하면?

① $-1 + 3i$ ② $-1 - 2i$ ③ $-1 + 2i$

④ $-1 - i$ ⑤ $-1 + i$

해설

$x = 1 + 2i,\ y = \dfrac{1+2i}{1-i},\ z = \dfrac{1-2i}{1-i}$

$\therefore\ xy + xz = \dfrac{(1+2i)^2}{1-i} + \dfrac{(1-2i)(1+2i)}{1-i}$

$= \dfrac{-3+4i+5}{1-i}$

$= \dfrac{2+4i}{1-i}$

$= -1 + 3i$

3. 두 수 $1+2i$, $1-2i$를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2-2x-5=0$　② $x^2+2x+5=0$

③ $x^2+5x+2=0$　④ $x^2-2x+5=0$

⑤ $x^2-5x+2=0$

해설

$\alpha+\beta=(1+2i)+(1-2i)=2$
$\alpha\beta=(1+2i)(1-2i)=5$
$\therefore x^2-2x+5=0$

4. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$

④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면

$x^2 + (m-3)x + 1 = 0, D = (m-3)^2 - 4 > 0$

$m^2 - 6m + 5 > 0, (m-1)(m-5) > 0$

$\therefore\ m < 1,\ m > 5$

5. 다음 삼차방정식의 정수해를 구하여라.

$$x^3 - 1 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^3 - 1 = 0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ 정수해는 $x = 1$

6. 연립부등식 $\begin{cases} 2x \le x+4 \\ x^2-4x-5<0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5개

해설

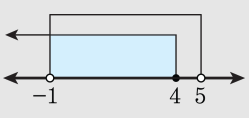
㉠ $2x \le x+4$,

$\therefore x \le 4$

㉡ $x^2-4x-5<0$

$\Rightarrow (x-5)(x+1)<0$

$\therefore -1<x<5$



㉠, ㉡의 범위의

공통범위는 $-1<x \le 4$

$\therefore x=0,1,2,3,4$ 총 5개

7. 두 점 $(2,0)$, $(-2,0)$ 을 지나는 이차함수 $y=x^2+ax+b$ 는 $x=c$ 일 때, 최솟값 d 를 갖는다. 이 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

두 점 $(2,0),(-2,0)$ 을 지나므로
$y=x^2+ax+b$ 는 y 축 대칭이다.
축이 $x=0$ 에서 $a=0$, $c=0$, $b=d$
$(2,0)$ 을 지나므로 $0=4+b$ $\therefore b=-4=d$
$\therefore a+b+c+d=0-4+0-4=-8$

8. 다음은 삼차방정식 $x^3 + px + 1 = 0$의 한 근을 α라고 할 때, $-\alpha$는 $x^3 + px - 1 = 0$의 근이고, $\frac{1}{\alpha}$은 $x^3 + px^2 + 1 = 0$의 근임을 보인 과정이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

α는 $x^3 + px + 1 = 0$의 근이므로 $\alpha^3 + p\alpha + 1 = 0$ $\cdots$㉠ $f(x) = x^3 + px - 1$이라고 하면 $f(-\alpha) =$ (가)$=$ (나) $= 0$ ($\because$ ㉠) 따라서 $-\alpha$는 $x^3 + px - 1 = 0$의 근이다. 또 $g(x) = x^3 + px^2 + 1$이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) =$ (다)$=$ (라)$=$ (마) $= 0$($\because$ ㉠) 따라서, $\frac{1}{\alpha}$은 $x^3 + px^2 + 1 = 0$의 근이다.

① (가) $(-\alpha)^3 + p(-\alpha) - 1$ ② (나) $-(\alpha^3 - p\alpha + 1)$

③ (다) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + 1$ ④ (라) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 (1 + p\alpha + \alpha^3)$

⑤ (마) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \cdot 0$

해설

α는 $x^3 + px + 1 = 0$의 근이므로 $\alpha^3 + p\alpha + 1 = 0$ $\cdots$㉠

$f(x) = x^3 + px - 1$이라고 하면 $f(-\alpha) = (-\alpha)^3 + p(-\alpha) - 1$

$= -(\alpha^3 + p\alpha + 1) = 0$ ($\because$ ㉠)

따라서 $-\alpha$는 $x^3 + px - 1 = 0$의 근이다.

또 $g(x) = x^3 + px^2 + 1$이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + 1$

$= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 (1 + p\alpha + \alpha^3) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \cdot 0 = 0$ ($\because$ ㉠)

따라서 $\frac{1}{\alpha}$은 $x^3 + px^2 + 1 = 0$의 근이다.

9. 연립방정식 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+2z=3 \\ 2x+y-z=-1 \end{cases}$ 의 해를 $x=a, y=b, z=c$라 할 때,

$(a+b)^2+c$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x+y+z=3 \quad \cdots$ ①

$x-y+2z=3 \quad \cdots$ ②

$2x+y-z=-1 \quad \cdots$ ③

① + ② : $2x+3z=6$

② + ③ : $3x+z=2$

연립하면, $x=0, \quad z=2$

$\therefore y=1$

$\therefore (a+b)^2+c=3$

10. 다음 두 방정식이 공통근 α를 갖는다. 이 때, $m+\alpha$의 값을 구하여라.

$$x^2+(m+2)x-4=0\ ,\ x^2+(m+4)x-6=0$$

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

두 방정식의 공통근이 α이므로
$\alpha^2+(m+2)\alpha-4=0\cdots$㉠
$\alpha^2+(m+4)\alpha-6=0\cdots$㉡
㉠ − ㉡ 에서 $-2\alpha+2=0\ \therefore\ \alpha=1$
$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $1+m+2-4=0$
$\therefore\ m=1$
$\therefore\ m+\alpha=2$

11. 부등식 $|x-1|+|x+2|<5$의 해가 $a<x<b$일 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 1

해설

$|x-1|+|x+2|<5$에서

i) $x<-2$일 때,

$-(x-1)-(x+2)<5 \ \therefore \ -2x<6 \ \therefore \ x>-3$

곧, $x<-2$일 때, $x>-3$

$\therefore \ -3<x<-2 \cdots\cdots$ ㉠

ii) $-2\le x<1$일 때,

$-(x-1)+(x+2)<5 \quad \therefore \ -0\cdot x<2$

이 부등식은 항상 성립하므로

$-2\le x<1 \cdots\cdots$ ㉡

iii) $x\ge 1$일 때,

$(x-1)+(x+2)<5 \quad \therefore \ 2x<4 \ \therefore \ x<2$

곧, $x\ge 1$일 때, $x<2$

$\therefore 1\le x<2 \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢으로부터 $-3<x<2$이므로

$a=-3,\ b=2$

$\therefore a+b=-1$

12. 부등식 $ax^2+5x+b>0$ 을 풀어서 $2<x<3$ 이라는 해가 구해졌다. 이 때, ab 의 값을 구하여라.

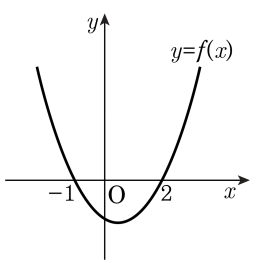
▶ 답:

▷ 정답: $ab=6$

해설

$ax^2+5x+b>0$ ·····㉠
해가 $2<x<3$ 이 되는 이차부등식은
$(x-2)(x-3)<0$ 전개하면
$x^2-5x+6<0$ ·····㉡
㉠과 일차항의 계수를 맞추기위해
양변에 -1 을 곱하면
$-x^2+5x-6>0$ ·····㉢
㉠, ㉢이 일치해야 하므로 $a=-1$, $b=-6$

13. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x-2005) \le 0$ 의 해는?



① $1999 \le x \le 2002$

② $2000 \le x \le 2003$

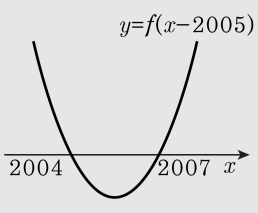
③ $2001 \le x \le 2004$

④ $2002 \le x \le 2004$

⑤ $2004 \le x \le 2007$

해설

함수 $y = f(x-2005)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2005만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $y = f(x-2005)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 부등식 $y = f(x-2005) \le 0$ 의 해는 $2004 \le x \le 2007$



14. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \le k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1,\ a < 2$

ii) $f(1) > 0,\quad 1 - a + 9 > 0,\quad a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$D = a^2 - 4 \cdot 9 \ge 0,\ a \ge 6,\ a \le -6$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \le -6$

$\therefore k = -6$

15. 10 이하의 자연수 n에 대해, $\dfrac{(1+i)^{2n}}{2^n} = -1$ 을 만족하는 모든 n의 총합은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$$\frac{(1+i)^{2n}}{2^n} = \frac{\{(1+i)^2\}^n}{2^n} = \left(\frac{2i}{2}\right)^n = i^n$$

$i^n = -1$이므로 $n = 4k+2 (k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

n이 10 이하의 자연수이므로 $n = 2, 6, 10$

$\therefore\ 2+6+10 = 18$

16. 복소수 z가 $z+|z|=2+8i$를 만족시킬 때, $|z|^2$의 값은? (단, $z=a+bi$ (a, b는 실수)일 때, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$이다.)

① 68 ② 100 ③ 169 ④ 208 ⑤ 289

해설

$z=a+bi$라 놓자.

$z+|z|=2+8i$,

$a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=2+8i$

$a+\sqrt{a^2+b^2}=2,\ b=8$

$a+\sqrt{a^2+64}=2$

$\sqrt{a^2+64}=2-a$ 양변제곱하면,

$a^2+64=(2-a)^2=a^2-4a+4$

$4a=-60,\ a=-15$

$\therefore\ |z|^2=a^2+b^2=225+64=289$

17. 구간 $0 < x < 5$에서 $x = \dfrac{1}{x - [x]}$를 만족시키는 x의 개수는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

① 2개 ② 3개 ③ 4개

④ 5개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$x - [x] \neq 0$이므로 x는 정수가 아니다.
주어진 식의 양변에 $x - [x]$를 곱하면
$x^2 - x[x] - 1 = 0$
(i) $0 < x < 1$일 때 $[x] = 0$, $x^2 - 1 = 0$
$\therefore\ x = \pm 1$, 이 값은 $0 < x < 1$에 속하지 않는다.
$\therefore$해가 없다.
(ii) $1 < x < 2$일 때 $[x] = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$

$\therefore\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$1 < x < 2$이므로 $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

(iii) $2 < x < 3$일 때 $[x] = 2$
$\therefore\ x^2 - 2x - 1 = 0$
$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$
$2 < x < 3$이므로 $x = 1 + \sqrt{2}$
(iv) $3 < x < 4$일 때 $[x] = 3$
$\therefore\ x^2 - 3x - 1 = 0$

$\therefore\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$3 < x < 4$이므로 $x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$

(v) $4 < x < 5$일 때 $[x] = 4$
$\therefore\ x^2 - 4x - 1 = 0$
$x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$
$4 < x < 5$이므로 $x = 2 + \sqrt{5}$
(i), (ii), (iii), (iv), (v)에서 x의 개수는 4개

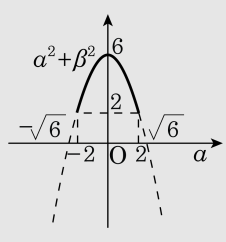
18. x 의 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 3 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^2 - ax + a^2 - 3 = 0 \cdots$ ㉠
㉠는 두 실근을 가지므로,
$D = a^2 - 4(a^2 - 3) \geq 0$, 즉 $a^2 - 4 \leq 0 \therefore \ -2 \leq a \leq 2$
그런데 α, β 는 ㉡의 두 근이므로,
근과 계수와의 관계에서
$\alpha + \beta = a$, $\alpha\beta = a^2 - 3$
$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = a^2 - 2(a^2 - 3) = 6 - a^2$

여기서, $-2 \leq a \leq 2$ 이므로
$0 \leq a^2 \leq 4$
$\therefore \ 2 \leq 6 - a^2 \leq 6$
$\therefore \ 2 \leq \alpha^2 + \beta^2 \leq 6$
따라서 $\alpha^2 + \beta^2$ 은
$a = 0$ 일 때 최대이고, 최댓값 : 6
$a = \pm 2$ 일 때 최소이고, 최소값 : 2



19. 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+cx^2+dx+1=0$이 한 실근과 두 허근 α, α^2을 가질 때, $c+d$의 값을 구하면?

① 6　② 5　③ 4　④ 3　⑤ 2

해설

$\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq 0$)라 놓으면 $\alpha^2=a^2-b^2+2abi=a-bi$ ($\because$ 계수가 실수이므로 $\alpha^2=\overline{\alpha}$)

$\therefore\ a^2-b^2=a,\ 2ab=-b$ 에서 $a=-\frac{1}{2},\ b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ 두 허근 $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$를 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+x+1=0$

x^3의 계수, 상수항을 비교하면 한 실근은 -1

$x^3+cx^2+dx+1=(x^2+x+1)(x+1)=x^3+2x^2+2x+1$

$\therefore\ c=2,\ d=2$

$\therefore\ c+d=4$

20. 다음의 $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수의 최댓값은?

내접원의 반지름의 길이가 1인 직각삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 r 라 하면, $r \geq \square$ 이다.

① 2 ② $1+\sqrt{2}$ ③ $1+\sqrt{3}$

④ $2+\sqrt{2}$ ⑤ $2+\sqrt{3}$

해설

아래 그림과 같이 내접원의 반지름이 1인 직각삼각형 ABC와 내접원의 접점을 각각
, D, E, F 라 하고, $\overline{\mathrm{BD}}=x, \overline{\mathrm{AE}}=y$ 라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=2r$ 이고 $\overline{\mathrm{BF}}=x, \overline{\mathrm{AF}}=y$ 이므로
$2r=x+y\cdots$㉠
또, 피타고라스정리에 의하여
$(x+1)^2+(y+1)^2=(2r)^2\cdots$㉡
㉠에서 $y=2r-x$ 를 ㉡에 대입하여 정리하면
$x^2-2rx+2r+1=0\cdots$㉢
㉢이 실근을 가지므로
$D/4=r^2-(2r+1)\geq 0$
$\therefore\ r\geq 1+\sqrt{2}$