

1. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이
반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$$(x - k)^2 + (y + k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

반지름의 길이가 1 이므로

$$\textcircled{1} \text{에서 } -k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0, (k - 1)(k - 3) = 0$$

$$\therefore k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 합은 4이다.

2. 두 점 A(-5, 1), B(3, 7) 을 지름의 양끝으로 하는 원의 중심을 (a, b) , 반지름의 길이를 r 이라 할 때, $a + b + r$ 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

A(-5, 1) B(3, 7) 이 지름의 양끝이므로
 $\overline{AB}$ 의 중점은 중심의 좌표와 같다.
중점
 $M = \left(\frac{-5+3}{2}, \frac{1+7}{2} \right) = (-1, 4) = (a, b)$
반지름
 $r = \sqrt{(-5+1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{25} = 5$
 $\therefore a + b + r = -1 + 4 + 5 = 8$

3. 다음의 x, y 에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 않은 것은?

- ① $x^2 + y^2 + x + 2y + 1 = 0$
- ② $x^2 + y^2 + x + 2y + 2 = 0$
- ③ $x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$
- ④ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$
- ⑤ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$

해설

- ① $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$
- ② $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = -\frac{3}{4}$
- ③ $(x + 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
- ④ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$
- ⑤ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$

4. a 를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2 + y^2 - 2ax + 2ay - 4a - 5 = 0$ 의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y+a)^2 &= 2a^2 + 4a + 5 \\ &= 2(a+1)^2 + 3\end{aligned}$$

따라서 $a = -1$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(a, -a) = (-1, 1)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

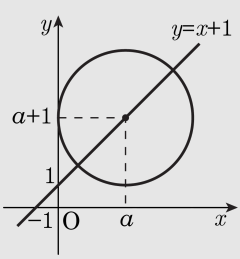
$$= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

5. y 축에 접하고 중심이 직선 $y = x + 1$ 위에 있는 원의 반지름의 길이가 3 일 때, 원점과 이 원의 중심 사이의 거리는? (단, 원의 중심은 제1사분면 위에 있다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $y = x + 1$ 위에 있는 원의 중심을 $(a, a + 1)$ 로 놓고 주어진 조건을 만족하도록 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.
이때, 이 원의 반지름의 길이가 3 이므로 $a = 3$
따라서, 원의 중심이 $(3, 4)$ 이므로
원점과 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$



6. 두 점 A(-5, 0), B(0, 0) 에서의 거리의 비가 2 : 3 인 점 P의 자취는 원이다. 이 원의 반지름의 길이를 구하면?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

점 P의 좌표를 P(x, y) 라 하면

$$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$$

즉 $4\overline{PB}^2 = 9\overline{PA}^2$ 이므로

$$4(x^2 + y^2) = 9\{(x + 5)^2 + y^2\}$$

$$5x^2 + 5y^2 + 90x + 225 = 0$$

$$\therefore (x + 9)^2 + y^2 = 36$$

따라서 반지름의 길이는 6이다.

7. 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있고, 두 점 $(3, 0)$, $(0, 1)$ 을 지나는 원의 방정식은 ?

- ① $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$
② $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$
③ $5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$
④ $5x^2 + 5y^2 + 8x - 16y - 21 = 0$
⑤ $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 12 = 0$

해설

구하는 원의 중심이 직선 $2x + y = 0$ 위에 있으므로 중심을 $(a, -2a)$ 라 할 수 있다.

$$(x-a)^2 + (y+2a)^2 = r^2$$

점 $(3, 0)$ 을 지나므로,

$$(3-a)^2 + (2a)^2 = r^2 \dots \textcircled{1}$$

또, 점 $(0, 1)$ 을 지나므로,

$$a^2 + (1+2a)^2 = r^2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = \frac{4}{5}, r^2 = \frac{37}{5}$$

$$\therefore \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{5}\right)^2 = \frac{37}{5}$$

$$\text{정리하면 } 5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$$

8. 두 점 A(-8, -2), B(2, 8) 에 대하여 원 $x^2 + y^2 = 27$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle ABC$ 의 무게 중심 G 는 어떻게 움직이는가?
- ① $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ ② $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$
③ $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 2$ ④ $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 3$
⑤ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

해설

$P(a, b) \ a^2 + b^2 = 27$

무게중심 $G(x, y) = \left(\frac{-8+2+a}{3}, \frac{-2+8+b}{3} \right)$
 $\qquad\qquad\qquad = \left(\frac{a-6}{3}, \frac{b+6}{3} \right)$

$X = \frac{a-6}{3}, \ Y = \frac{b+6}{3}$

$a = 3X + 6, \ b = 3Y - 6 \ a^2 + b^2 = 27$ 에 대입하면,
 $(3X+6)^2 + (3Y-6)^2 = 27$
 $\therefore (X+2)^2 + (Y-2)^2 = 3$
따라서 $G(X, Y)$ 의 자취는 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 3$