1. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이 반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$(x-k)^2 + (y+k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \cdots$ ㉠

반지름의 길이가 1 이므로

㉠에서 $-k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$

$k^2 - 4k + 3 = 0, (k-1)(k-3) = 0$

$\therefore k = 1$ 또는 $k = 3$

따라서 합은 4 이다.

2. 두 점 A(−5, 1), B(3, 7) 을 지름의 양끝으로 하는 원의 중심을 $(a,\ b)$, 반지름의 길이를 r 이라 할 때, $a+b+r$ 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

A(−5, 1) B(3, 7) 이 지름의 양끝이므로
$\overline{AB}$ 의 중점은 중심의 좌표와 같다.
중점

$$M=\left(\frac{-5+3}{2},\ \frac{1+7}{2}\right)=(-1,\ 4)=(a,\ b)$$

반지름

$$r=\sqrt{(-5+1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{25}=5$$

$$\therefore\ a+b+r=-1+4+5=8$$

3. 다음의 x, y 에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 않은 것은?

① $x^2+y^2+x+2y+1=0$ ② $x^2+y^2+x+2y+2=0$

③ $x^2+y^2+2x+y+1=0$ ④ $x^2+y^2-2x+4y+3=0$

⑤ $x^2+y^2-2x+4y+4=0$

해설

① $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$

② $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=-\frac{3}{4}$

③ $(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

④ $(x-1)^2+(y+2)^2=2$

⑤ $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

4. a를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2+y^2-2ax+2ay-4a-5=0$의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$(x-a)^2+(y+a)^2=2a^2+4a+5$

$=2(a+1)^2+3$

따라서 $a=-1$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(a,\ -a)=(-1,\ 1)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

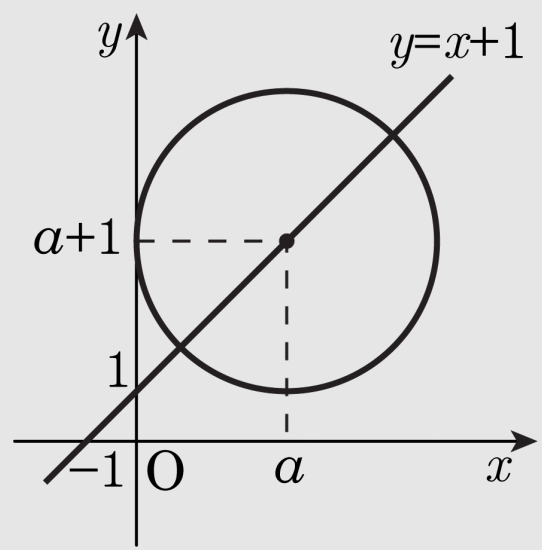
$=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

5. y 축에 접하고 중심이 직선 $y = x + 1$ 위에 있는 원의 반지름의 길이가 3 일 때, 원점과 이 원의 중심 사이의 거리는? (단, 원의 중심은 제1사분면 위에 있다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $y = x + 1$ 위에 있는 원의 중심을 $(a, a + 1)$ 로 놓고 주어진 조건을 만족하도록
좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때, 이 원의 반지름의 길이가 3 이므로
$a = 3$
따라서, 원의 중심이 $(3, 4)$ 이므로
원점과 원의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

6. 두 점 $\mathrm{A}(-5,0)$, $\mathrm{B}(0,0)$ 에서의 거리의 비가 $2 : 3$ 인 점 P 의 자취는 원이다. 이 원의 반지름의 길이를 구하면?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y)$ 라 하면

$\overline{\mathrm{PA}} : \overline{\mathrm{PB}} = 2 : 3$

즉 $4\overline{\mathrm{PB}}^2 = 9\overline{\mathrm{PA}}^2$ 이므로

$4(x^2 + y^2) = 9\left\{(x+5)^2 + y^2\right\}$

$5x^2 + 5y^2 + 90x + 225 = 0$

$\therefore (x+9)^2 + y^2 = 36$

따라서 반지름의 길이는 6 이다.

7. 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있고, 두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ 1)$ 을 지나는 원의 방정식은 ?

① $x^2+y^2-2x+4y-6=0$

② $x^2+y^2+2x-4y-6=0$

③ $5x^2+5y^2-8x+16y-21=0$

④ $5x^2+5y^2+8x-16y-21=0$

⑤ $x^2+y^2-4x+8y-12=0$

해설

구하는 원의 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있으므로 중심을 $(a,\ -2a)$ 라 할 수 있다.

$(x-a)^2+(y+2a)^2=r^2$

점 $(3,\ 0)$ 을 지나므로,

$(3-a)^2+(2a)^2=r^2\cdots①$

또, 점 $(0,\ 1)$ 을 지나므로,

$a^2+(1+2a)^2=r^2\cdots②$

①, ②에서 $a=\dfrac{4}{5},\ r^2=\dfrac{37}{5}$

$\therefore\ \left(x-\dfrac{4}{5}\right)^2+\left(y+\dfrac{8}{5}\right)^2=\dfrac{37}{5}$

정리하면 $5x^2+5y^2-8x+16y-21=0$

8. 두 점 A$(-8,\ -2)$, B$(2,\ 8)$ 에 대하여 원 $x^2+y^2=27$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle$ABC 의 무게 중심 G 는 어떻게 움직이는가?

① $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ ② $(x+1)^2+(y-1)^2=2$

③ $(x+2)^2+(y+1)^2=2$ ④ $(x+2)^2+(y-2)^2=3$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

해설

P$(a,\ b)$ $a^2+b^2=27$

무게중심 $\mathrm{G}(x,y)=\left(\dfrac{-8+2+a}{3},\ \dfrac{-2+8+b}{3}\right)$

$=\left(\dfrac{a-6}{3},\ \dfrac{b+6}{3}\right)$

$X=\dfrac{a-6}{3},\ Y=\dfrac{b+6}{3}$

$a=3X+6,\ b=3Y-6$ $a^2+b^2=27$ 에 대입하면,

$(3X+6)^2+(3Y-6)^2=27$

$\therefore\ (X+2)^2+(Y-2)^2=3$

따라서 G$(X,\ Y)$ 의 자취는 $(x+2)^2+(y-2)^2=3$