1. 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$x^2-3x+2=0$

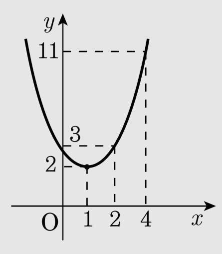
$(x-2)(x-1)=0$

$x=1$ 또는 $x=2$이므로 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

2. $2 \leq x \leq 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

해설



$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

따라서 함수의 그래프는 점$(1, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이므로

(ⅰ) $x = 2$ 일 때 최소이며, 최솟값은 $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$

$\therefore\ m = 3$

(ⅱ) $x = 4$ 일 때 최대이며, 최댓값은 $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$

$\therefore\ M = 11$

$\therefore\ M + m = 14$

3. 다음 중 방정식 $x^4-3x^3+5x^2-x-10=0$의 근이 아닌 것은?

① -1 ② 1 ③ 2

④ $1+2i$ ⑤ $1-2i$

해설

조립제법을 이용하여 주어진 식을 인수분해 하면

$x^4-3x^3+5x^2-x-10=0$

$(x+1)(x^3-4x^2+9x-10)=0$

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+5)=0$

$(x+1)(x-2)(x-1-2i)(x-1+2i)=0$

$\therefore\ x=-1,\ 2,\ 1+2i,\ 1-2i$

따라서 근이 아닌 것은 1이다.

4. 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2y+3z=-2 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3z+x=-5 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$ 를 풀면 $x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ 이다.
이때, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

주어진 세 식을 변변끼리 더하면
$2(x+2y+3z)=-2$,즉 $x+2y+3z=-1$ ⋯⋯㉣
㉣ − ㉡을 하면 $x=1$
㉣ − ㉢을 하면 $y=2$
㉣ − ㉠을 하면 $z=-2$
$\therefore\ \alpha\beta\gamma=xyz=-4$

5. 이차부등식 $x^2 + 2x + a < 0$의 해가 $-4 < x < 2$일 때, a의 값을 구하여라.(단, a는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

해가 $-4 < x < 2$ 이므로

$(x+4)(x-2) < 0$

$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + a$

$\therefore a = -8$

6. 두 부등식 $2x-1>0$, $(x+1)(x-a)<0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{2}<x<3$ 이 되도록 하는 정수 a의 값은? (단,$a>1$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}\cdots\cdots$ ①

$(x+1)(x-a)<0$

$\therefore -1<x<a\cdots\cdots$ ②

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2}<x<3$ 이므로

$\therefore a=3$

7. 복소수 $(1+2i)x-(2+i)y+i$를 제곱하였더니 -9가 되었다. 이 때, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이고 x, y는 실수이다.)

① 2 또는 -4　② 2 또는 -3　③ -1 또는 3
④ -1 또는 -3　⑤ -1 또는 -2

해설

$z=(x-2y)+(2x-y+1)i$
$z^2=-9$
즉, z는 순허수이다.
$\therefore x-2y=0,\ (2x-y+1)^2=9$
$x=2y$ 와 $2x-y+1=\pm 3$을 연립하여 풀면
$y=\frac{2}{3}\rightarrow x=\frac{4}{3}$
$y=-\frac{4}{3}\rightarrow x=-\frac{8}{3}$
$\therefore x+y=2$ 또는 -4 이다.

8. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y를 구할 때, x^2+y^2의 값을 구하시오.

$$(1-2xi)(2-yi)=6-2i \text{ (단, } x>0\text{)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(2-2xy)-(4x+y)i=6-2i$

$2-2xy=6,\ 4x+y=2$

연립하여 x 에 대해 정리하면

$2x^2-x-1=0$

$(x-1)(2x+1)=0$

$\therefore\ x=1(x>0),\ y=-2$

9. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ 일 때, $f\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right) + f\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right) + f\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$

$= f(i^2) + f((-i)^2)$

$= f(-1) + f(-1)$

$= 0$

10. 조건 $x^2 - 2kx + k^2 + 2k + 3 = 0$ 의 두 근의 차가 2 를 만족하는 실수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 근을 $\alpha,\ \alpha + 2$ 라 하면
근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha + \alpha + 2 = 2k & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha(\alpha + 2) = k^2 + 2k + 3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\alpha = k - 1$을 ㉡에 대입하면,
$(k - 1)(k + 1) = k^2 + 2k + 3$
$\therefore\ k = -2$

11. 삼차방정식 $x^3+mx+n=0$이 중근 α와 또 다른 실근을 가질 때, n을 α를 써서 나타내면?

① α^2　　② α^3　　③ $2\alpha^3$　　④ α^4　　⑤ $2\alpha^4$

해설

$x^3+mx+n=(x-\alpha)^2(x+\beta)$
$=(x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x+\beta)$
$=x^3+(\beta-2\alpha)x^2+(\alpha^2-2\alpha\beta)x+\alpha^2\beta$
$=\beta-2\alpha=0$

즉, $\beta=2\alpha$이므로 $n=2\alpha^3$

12. 0이 아닌 세 실수 a, b, c에 대하여 $a > b,\ c < 0$일 때, 다음 보기 중 항상 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면 몇 개인가?

(1) $ac < bc$	(2) $a^2 > b^2$	(3) $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
(4) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	(5) $a^3 > b^3$	

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

(1) $a > b,\ ac < bc \Rightarrow (\bigcirc)$

(2) (반례) $a = 1,\ b = -2$

$1 > -2,\ (1)^2 < (-2)^2 \Rightarrow (\times)$

(3) $a > b,\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \Rightarrow (\bigcirc)$

(4) (반례) $1 > -2,\ 1 > -\frac{1}{2} \Rightarrow (\times)$

(5) $a^3 > b^3 \Rightarrow (\bigcirc)$

$\therefore$ 참 : (1), (3), (5)

13. $64 \le 16x - x^2$ 의 해를 구하면?

① $4 \le x \le 8$ ② $x = 8$ ③ 해는 없다.
④ 모든 실수 ⑤ $x \le 8$

해설

$64 \le 16x - x^2$
$x^2 - 16x + 64 \le 0$
$\Rightarrow \ (x-8)^2 \le 0$
$\Rightarrow \ x = 8$

14. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2 + 2kx - k + 6 > 0$이 항상 성립하도록 k의 범위를 구하면 $m < k < n$이다. 이 때, $m^2 + n^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$x^2 + 2kx - k + 6 > 0$이 항상 성립하려면
판별식 $D < 0$이다.
$\frac{D}{4} = k^2 - (-k + 6) < 0$
$k^2 + k - 6 < 0$, $(k+3)(k-2) < 0$
$-3 < k < 2$
$\therefore m = -3$, $n = 2$
$\therefore$ $m^2 + n^2 = (-3)^2 + 2^2 = 13$

15. n이 자연수이고 α_n, β_n이 이차방정식 $(n+\sqrt{n(n-1)})x^2-\sqrt{n}x-\sqrt{n}=0$의 두 실근일 때, $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{49})+(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{49})$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 6　　⑤ 7

해설

$\left(n+\sqrt{n(n-1)}\right)x^2-\sqrt{n}x-\sqrt{n}=0$

근과 계수의 관계에 따라

$$\alpha_n+\beta_n=\frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n(n-1)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

$\alpha_1+\beta_1=\sqrt{1}-0$

$\alpha_2+\beta_2=\sqrt{2}-\sqrt{1}$

$\vdots$

$\alpha_{49}+\beta_{49}=\sqrt{49}-\sqrt{48}$

$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{49})+(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{49})$

$=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+(\alpha_{49}+\beta_{49})$

$=1+(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})$

$=\sqrt{49}=7$

16. 모든 실수 x에 대하여 이차함수 $y=x^2-2x+2$ 의 그래프가 직선 $y=mx-2$보다 위쪽에 있을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $-6<m<2$ ② $-4<m<1$ ③ $-2<m<0$
④ $2<m<5$ ⑤ $4<m<6$

해설

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-2x+2>mx-2$ 가 성립하므로
$x^2-(m+2)x+4>0$ 에서
이차방정식 $x^2-(m+2)x+4=0$ 의 판별식을 D라 하면
$D=(m+2)^2-16<0$
$(m+6)(m-2)<0$
$\therefore -6<m<2$

17. x, y에 관한 연립방정식 $ax+by+c=0, bx+cy+a=0$의 해가 부정일 때, $x+y$의 값은? (단, a, b, c는 0이 아닌 실수)

① 0 ② 1 ③ −1 ④ 2 ⑤ −2

해설

해가 부정(무수히 많다)이므로

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$가 성립해야 한다.

이것을 k로 놓으면,

$a=bk,\ b=ck,\ c=ak$

$\therefore\ abc=abck^3$, $abc\neq 0$이므로 $k^3=1$

$\therefore\ k=1$

$\therefore\ a=c$

이 때, 두 방정식은 $a(x+y=1)=0$이 된다.

$a\neq 0$이므로 $x+y=-1$

18. 방정식 $2x^2 + 2xy + 5y^2 + 6x + 12y + 9 = 0$ 을 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $x + y$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

준식을 y에 대한 내림차순으로 정리하면

$5y^2 + 2(x+6)y + (2x^2 + 6x + 9) = 0$

y 가 실근을 가져야 하므로 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (x+6)^2 - 5(2x^2 + 6x + 9) \\ &= -9x^2 - 18x - 9 = -9(x+1)^2 \geq 0\end{aligned}$$

따라서 $-9(x+1)^2 = 0$

$x + 1 = 0$

$\therefore\ x = -1$

준식에 $x = -1$ 을 대입하면

$2 - 2y + 5y^2 - 6 + 12y + 9 = 0$

$5y^2 + 10y + 5 = 0$

$5(y+1)^2 = 0$

$\therefore\ y = -1$

$\therefore\ x + y = -2$

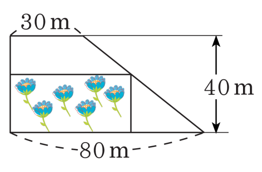
19. $(z-\bar{z})\times i$ 가 음수이고 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 와 $\dfrac{z^2}{1+z}$ 이 모두 실수일 때, z^2 의 값은?
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　② $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　③ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
④ $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　⑤ $1+i$

해설

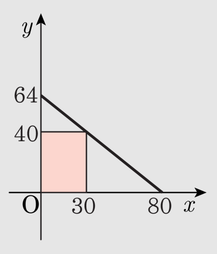
$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$
$(z-\bar{z})\times i<0$ 에서 $-2b<0 \therefore b>0$
$\dfrac{z}{1+z^2}$ 가 실수이므로
$$\frac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}=\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$
$\therefore\ z(1+\bar{z}^2)=\bar{z}(1+z^2) \Leftrightarrow (z\bar{z}-1)(z-\bar{z})=0$
$\therefore\ z\bar{z}=1\ (\because\ z-\bar{z}\neq 0)$
$a^2+b^2=1\cdots$㉠
한편, $\dfrac{z^2}{1+z}$ 이 실수이므로
$$\frac{z^2}{1+z}=\overline{\left(\frac{z^2}{1+z}\right)}=\frac{\bar{z}^2}{1+\bar{z}}$$
$\Leftrightarrow\ z^2(1+\bar{z})=\bar{z}^2(1+z)$
$\Leftrightarrow\ (z-\bar{z})(z+\bar{z}+z\bar{z})=0$
$\therefore\ z+\bar{z}=-z\bar{z}=-1(\because\ z-\bar{z}\neq 0)$
$2a=-1\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(\because b>0)$
$$\therefore\ z^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

20. 아래 그림과 같은 사다리꼴 모양의 토지 안에 직사각형 모양의 꽃밭을 가능한 한 넓게 만들려고 한다. 이 꽃밭의 넓이의 최댓값은? (단, 넓이의 단위는 m^2)



① $1240\,m^2$　② $1260\,m^2$　③ $1280\,m^2$
④ $1300\,m^2$　⑤ $1320\,m^2$

해설



$80 : 30 = 40 + k : k$ 이므로 $k = 24$
따라서 y 절편은 64 가 된다.

빗변의 그래프는 $y = -\frac{4}{5}x + 64$ 이므로

사각형의 넓이는

$$x\left(-\frac{4}{5}x + 64\right) = -\frac{4}{5}x^2 + 64x$$
$$= -\frac{4}{5}(x - 40)^2 + 1280$$

즉, 밑변의 길이가 40 m 일때 직사각형 넓이의 최댓값 $1280\,m^2$ 이 된다.