1. 방정식 $|x| + |x - 1| = 2$의 해를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$ 또는 -0.5

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$ 또는 1.5

해설

i) $x < 0$일 때,
$-x - (x - 1) = 2$이므로 $-2x + 1 = 2$
$\therefore\ x = -\frac{1}{2}$
ii) $0 \le x < 1$일 때,
$x - (x - 1) = 2$이므로 $0 \cdot x = 1$
$\therefore$ 해가 없다.
iii) $1 \le x$일 때,
$x + x - 1 = 2$이므로 $2x = 3$
$\therefore\ x = \frac{3}{2}$
(i), (ii), (iii) 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}$

2. 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$ 이 실수 k 의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$\dfrac{D}{4} = (k-a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$

$\therefore\ -2ka - b + 2 = 0$

이 식은 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k 에 대한 항등식이다.

$a = 0,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 2$

3. 이차함수 $y=x^2-2ax-2b^2-4a+4b-6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, a^2+b^2 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2　　② 5　　③ 8　　④ 10　　⑤ 13

해설

$x^2-2ax-2b^2-4a+4b-6=0$ 에서

$\frac{D}{4}=a^2-(-2b^2-4a+4b-6)=0$

$\therefore (a+2)^2+2(b-1)^2=0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a+2=0, b-1=0$

따라서 $a=-2, b=1$ 이므로

$a^2+b^2=5$

4. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 $x = 1$에서 최솟값 1을 가지고 $f(2) = 3$을 만족시킬 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a + b + c$의 값은?

① -4　　② -3　　③ 1　　④ 4　　⑤ 7

해설

$f(x) = a(x-1)^2 + 1$ 에서 $f(2) = 3$ 이므로

$a + 1 = 3 \quad \therefore a = 2$

즉, $f(x) = 2(x-1)^2 + 1 = 2x^2 - 4x + 3$ 이므로

$b = -4,\ c = 3$

$\therefore a + b + c = 2 - 4 + 3 = 1$

5. 사차방정식 $x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$ 의 모든 해의 곱을 구하면?

① -8 ② -2 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$

$\{x(x+1)\}\{(x-1)(x+2)\}-8=0$

$(x^2+x)(x^2+x-2)-8=0$

$x^2+x=t$ 라 하면, $t(t-2)-8=0$

$\therefore\ t^2-2t-8=x^4+2x^3-x^2-2x-8=0$

근과 계수와의 관계에 의해서, 근을 α, β, γ, δ 라 하면 $\therefore$ 모든 해의 곱은 -8

해설

근과 계수의 관계에서 모든 해의 곱을 나타내는 것은 다항식을 전개했을 때의 상수항이므로 -8 (단, 다항식의 최고차항의 차수가 홀수일 때는 상수항의 부호를 반대로 바꾼것이 모든 해의 곱이다.)

6. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1 - \sqrt{2}$, 2　　② $-1 + \sqrt{2}$, -3　　③ $1 - \sqrt{2}$, 3
④ $1 - \sqrt{2}$, -3　　⑤ $-1 + \sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5,\quad \alpha = 3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

7. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$ 을 간단히 하면? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 0　　② 1　　③ -1　　④ 2　　⑤ -2

해설

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2} = \frac{-2i}{2} = -i$, $i^4 = 1$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{100} &= \left(\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right)^{50} \\ &= (-i)^{50} \\ &= ((i)^4)^{12} \cdot i^2 \\ &= -1\end{aligned}$$

8. α, β 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$ 이면 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

㉡ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

① ㉠　② ㉠ ,㉡　③ ㉡ ,㉢
④ ㉠ ,㉢　⑤ ㉠ ,㉡ ,㉢

해설

$\alpha = a + bi \Rightarrow \overline{\beta} = a + bi$

㉠ $\alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ 는 실수 (T), $\alpha\beta = a^2 + b^2 =$ 실수

㉡ $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$
$\therefore \alpha = 0$ (T)

㉢ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

9. $\overline{z} = -z$ 를 만족하는 z 에 대하여 $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ 이라 할 때, $w\overline{w}$ 의 값을 구하여라. (단, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$z = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 로 놓으면 $\overline{z} = a - bi$

$\overline{z} = -z$ 이므로 $a - bi = -(a + bi)$

$a - bi = -a - bi$, $2a = 0$

따라서 $a = 0$ 이므로 $z = bi$

$z = bi$ 를 $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ 에 대입하면

$w = \dfrac{-1+bi}{1+bi}$, $\overline{w} = \overline{\left(\dfrac{-1+bi}{1+bi}\right)} = \dfrac{-1-bi}{1-bi}$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{w} &= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-1-bi}{1-bi} \\ &= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-(1+bi)}{-(-1+bi)} \\ &= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{1+bi}{-1+bi} = 1\end{aligned}$$

10. 이차방정식 $2[x]^2 + 3[x] + 1 = 0$의 해를 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-1 \le x < 0$ ② $-1 \le x < 1$ ③ $-1 \le x < 2$
④ $0 \le x < 1$ ⑤ $0 \le x < 2$

해설

$2[x]^2 + 3[x] + 1 = ([x]+1)(2[x]+1) = 0$이므로

$[x] = -1$ 또는 $[x] = -\frac{1}{2}$

그런데 $[x]$은 정수이므로 $[x] = -1$

$\therefore -1 \le x < 0$

11. 방정식 $x^2-4x+y^2-8y+20=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=(x-2)^2+(y-4)^2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=4$

$\therefore\ x+y=6$

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=0$이 실근을 가지므로

$D/4=4-(y^2-8y+20)\geq 0$

$y^2-8y+16\leq 0$

$(y-4)^2\leq 0,\ y=4$

준식에 대입하면 $x=2$

따라서 $x+y=6$

12. 다음 식은 평면 위에 있는 어떤 그래프의 방정식이다. 이 그래프가 x 축에 접하도록 실수 $a,\ b$ 의 값에 대해 $a+b$ 의 값을 구하면?

$$y+(x+y)x+(a-1)x-b^2=0$$

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

접점의 x 좌표는 $y=0$ 일 때, 얻어지는 방정식
$x^2+(a-1)x-b^2=0$ 의 중근이다.
$\therefore\ D=(a-1)^2+4b^2=0$
$a,\ b$ 는 실수이므로 $a=1$, $b=0$
$\therefore\ a+b=1$

13. $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3y+5z=21 \\ 5z+2x=17 \end{cases}$ 의 해가 $x=\alpha,\ y=\beta,\ z=\gamma$ 일 때, 곱 $\alpha\beta\gamma$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$\begin{cases} 2x+3y=8 & \cdots ㉠ \\ 3y+5z=21 & \cdots ㉡ \\ 5z+2x=17 & \cdots ㉢ \end{cases}$

㉠ + ㉡ + ㉢ 에서 $2(2x+3y+5z)=46$

$2x+3y+5z=23$

㉠ 식에서 $5z=15, z=3$, $y=2$, $x=1$

$\alpha\beta\gamma=1\cdot2\cdot3=6$

14. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+2xy+y^2 = 1 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y=x-3$을 이차식에 대입하면

$x^2+2x(x-3)+(x-3)^2=1$

$x^2-3x+2=0$

$\therefore\ x=1,2$

(i) $x=1$일 때 $y=-2$

(ii) $x=2$일 때 $y=-1$

따라서 $xy=-2$

15. $\alpha = a + bi$ ($a,\ b$는 실수, $i = \sqrt{-1}$) 일 때, $\alpha^t = b + ai$라 한다.
$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$을 간단히 하면?

① $1+i$　② $1-i$　③ $2+i$
④ $2-i$　⑤ $\sqrt{3}+i$

해설

$\alpha = a+bi,\ \alpha^t = b+ai$이므로
$\alpha\alpha^t = (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$
그런데 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = a+bi$에서
$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$　$\therefore\ \alpha\alpha^t = \left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\right)i = i$
$\therefore$ (준식)$= 2\alpha(\alpha\cdot\alpha^t)^4 = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\cdot i^4 = \sqrt{3}+i$

16. $x^2+3ax+b=0$과 $x^2-ax+c=0$은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2+b-c$가 최소가 되는 a의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

조건에서
$1+3a+b=0 \cdots ㉠$
$1-a+c=0 \cdots ㉡$
$㉠-㉡$: $4a+b-c=0$
$\therefore\ b-c=-4a$
$\therefore\ 2a^2+b-c=2a^2-4a=2(a-1)^2-2$
따라서 $a=1$일 때, 최소이다.

17. $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + bx + a = 0$이 단 한 개의 공통근을 가진다. $-1 \le a \le 0$일 때 $a^2 + b^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M + m$의 값을 구하면?

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{9}{2}$

해설

공통근을 α라 하면

$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots$①

$\alpha^2 + b\alpha + a = 0 \cdots$②

① − ② : $(a-b)(\alpha-1) = 0$에서

$a \neq b$이므로 $\alpha = 1$

$1 + a + b = 0$에서 $b = -a - 1$

$a^2 + b^2 = a^2 + (-a-1)^2 = 2a^2 + 2a + 1$

$= 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

$-1 \le a \le 0$이므로 $M = 1$, $m = \frac{1}{2}$

18. 다음 등식을 만족시키는 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a,b) 의 개수는?

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$$

① 0 개

② 1 개

③ 2 개

④ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 1 개씩 있다.

⑤ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 2 개씩 있다.

해설

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$, $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a+b}$, $(a+b)^2=ab$, $a^2+ab+b^2=0$

$\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2=0$ 실수로서 이 등식을 만족하는 경우는 $a=0,\ b=0$뿐이다.

따라서 0 이 아닌 실수의 순서쌍 $(a,\ b)$ 는 없다.

19. 실수 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$ 가 $9 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_9 = 0$ 을 만족할 때, $\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{x_3} \cdot \cdots \cdot \sqrt{x_9}$ 의 값이 될 수 있는 수를 모두 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $3i$ ② $-3i$

③ $3i,\ -3i$ ④ $3,\ -3$

⑤ $3,\ -3,\ 3i,\ -3i$

해설

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_9 = -9$ 이므로 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$ 중에서 음수의 개수는 홀수개이다.
이 중에서 음수인 것들은 그 절대값을 취하여
$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_m$ 이라 하고 양수인 것들을
$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \cdots,\ z_n$ 이라 하면, $(m + n = 9,\ m$ 은 홀수)

(i) $m = 4k + 1$ $(k = 0,\ 1,\ 2)$ 일 때

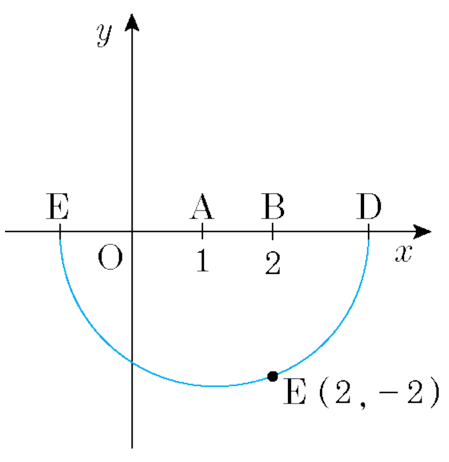
$$\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\cdots\sqrt{x_9}$$
$$= \sqrt{y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot i^{4k+1}$$
$$= \sqrt{9} \cdot i = 3i$$

(ii) $m = 4k + 3$ $(k = 1,\ 2)$ 일 때

$$\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\cdots\sqrt{x_9}$$
$$= \sqrt{y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot i^{4k+3}$$
$$= \sqrt{9} \cdot i^3$$
$$= -3i$$

(i), (ii) 에서 $3i,\ -3i$

20. 다음의 그림에서 점 C, D, E는 점 A를 중심으로 하는 반원 위에 있다. 계수가 유리수인 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$ 의 그래프가 점 E를 지날 때, 반드시 지나는 또 다른 점을 구하면?



① A　　② B　　③ C　　④ D　　⑤ O

해설

$\overline{AC} = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5}$ 이므로
$\overline{AD} = \overline{AE} = \sqrt{5}$ 이다.
$\therefore$ 점 D 의 좌표는 $(1 + \sqrt{5},\ 0)$,
점 E 의 좌표는 $(1 - \sqrt{5},\ 0)$ 이다.
그런데, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$ 의 그래프가 점 E를 지나므로
$x = 1 - \sqrt{5}$ 는 방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근이다.
여기서, $a,\ b,\ c$ 가 유리수이므로 $x = 1 + \sqrt{5}$
($\because$ 컬레근) 또한 방정식의 근이 된다.
따라서, 그래프는 점 $D(1 + \sqrt{5},\ 0)$ 을 지난다.