1. 이차함수 $y = 12x - (1+3x)(1-3x)$ 가 $x = p$ 에서 최소이고 최솟값은 q 일 때, $p+q$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{17}{3}$　② $-\frac{5}{3}$　③ 0　④ $\frac{8}{3}$　⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$y = 12x - (1+3x)(1-3x) = 9x^2 + 12x - 1$

$= 9\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 5 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5$

따라서, $x = -\frac{2}{3}$ 일 때 최소이고

최솟값은 -5 이므로

$p = -\frac{2}{3}$, $q = -5$

$\therefore p + q = -\frac{17}{3}$

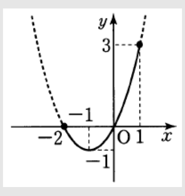
2. $-2 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, $-2 \le x \le 1$ 에서
$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.
즉, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$
따라서, $x = 1$ 일 때 최댓값 3,
$x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로
구하는 합은 $3 - 1 = 2$



3. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 1$ 일 때 최대이고 최댓값은 16 이다. 또, 그래프가 x 축과 만나는 두 점을 A, B 라고 할 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 8$ 이다. 이 때, $|a| + |b| + |c|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 1$ 일 때
최대이고 최댓값은 16 이므로
$y = ax^2 + bx + c = a(x-1)^2 + 16 = ax^2 - 2ax + a + 16\ (a < 0)$
$\therefore b = -2a,\ c = a + 16(a < 0) \cdots\cdots$ ㉠
$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라고 하면
$\overline{\mathrm{AB}} = |\beta - \alpha| = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} \cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $\dfrac{\sqrt{4a^2 - 4a(a+16)}}{-a} = 8$
$\therefore \sqrt{-64a} = -8a$ 양변을 제곱하면
$-64a = 64a^2,\ \ a^2 = -a,\ a(a+1) = 0$
그런데 $a < 0$ 이므로 $a = -1$
$\therefore b = -2a = 2,\ c = a + 16 = 15$
$\therefore |a| + |b| + |c| = 18$

4. 이차함수 $y = ax^2 + 2x + 4 + 2a$ $(a \neq 0)$ 의 최댓값이 3 일 때, a 의 값은?

① -5　　② -4　　③ -3　　④ -2　　⑤ -1

해설

이차함수에서 최댓값을 가지려면 이차항의 계수 a 의 부호는 음수이다.
주어진 식을 변형 하면

$$y = a\left\{x^2 + \frac{2}{a}x + \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{a}\right)^2\right\} + 4 + 2a$$

$$= a\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + 4 + 2a - \frac{1}{a}$$

따라서 $x = -\frac{1}{a}$ 일 때,

최댓값 $4 + 2a - \frac{1}{a} = 3$ 을 가진다.

$4 + 2a - \frac{1}{a} = 3$ 에서 $2a - \frac{1}{a} + 1 = 0$

$2a^2 + a - 1 = 0$, $(a+1)(2a-1) = 0$

$\therefore a = -1$ 또는 $a = \frac{1}{2}$

$a = -1 (\because\ a < 0)$

5. x가 실수일 때, 이차함수$y = ax^2 + bx + c$ 가 $x = 2$ 에서 최댓값 3 을 가질 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a < 0$ ㉡ $4a + b = 0$ ㉢ $4a - c = -3$

① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x = 2$ 에서 최댓값 3 을 갖는 이차함수는
$y = a(x-2)^2 + 3(a < 0)$ 이다.
$ax^2 + bx + c = a(x-2)^2 + 3$ 이므로
$b = -4a,\ c = 4a + 3$ 이다.

6. $0 \leq x \leq 3$ 에서 이차함수 $y = -4x^2 + 4x + a$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 10 일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① $\frac{11}{2}$ ② 11 ③ $\frac{33}{2}$ ④ 22 ⑤ $\frac{55}{2}$

해설

$y = -4x^2 + 4x + a = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a + 1$

$0 \leq x \leq 3$ 이므로 $x = \frac{1}{2}$ 일 때,

최댓값을 갖고 최댓값은 $a + 1$ 이다.

$x = 3$ 일 때, 최솟값을 갖고

최솟값은 $a - 24$ 이다.

최댓값과 최솟값의 합이 10 이므로

$(a + 1) + (a - 24) = 10$

$\therefore a = \frac{33}{2}$

7. x 에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+9-2a^2=0$ 이 실근 $\alpha,\ \beta$ 를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$ 의 최소값은 ? (단, a 는 실수)

① 12　　② 9　　③ 6　　④ 3　　⑤ 2

해설

$x^2+2ax+9-2a^2=0$ 에서
근과 계수와의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-2a,\ \alpha\beta=9-2a^2$
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=8a^2-18$
또 $\alpha,\ \beta$ 는 실근이므로 $\frac{D}{4}=a^2-(9-2a^2)\geq 0$
$\therefore a^2\geq 3$
따라서 $a^2=3$ 일 때, $\alpha^2+\beta^2$ 은 최소이고
최소값은 6 이다.

8. x의 값의 범위가 $2 \le x \le 4$ 인 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + 1$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -14

해설

$y = -2x^2 + 4x + 1 = -2(x-1)^2 + 3$ 이므로
$2 \le x \le 4$ 에서 $x = 2$ 일 때 최댓값1,
$x = 4$ 일 때 최솟값 -15를 가진다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $1 + (-15) = -14$

9. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$
$= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2$
따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$
$g(a) = -(a-2)^2 + 6$ 에서
$g(a)$ 의 최댓값은 6 이다.

10. $0 \le x \le 3$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - ax$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 최댓값은? (단, $0 \le a \le 2$)

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$ $(0 \le x \le 3)$

$0 \le \frac{a}{2} \le 1$ 이므로

최솟값 $m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4}$,

최댓값 $M = f(3) = 9 - 3a$

$\therefore M + m = 9 - 3a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}(a+6)^2 + 18$

이때, $0 \le a \le 2$ 이므로

$M + m$ 은 $a = 0$ 일 때 최댓값 9 를 갖는다.

11. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 2a - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 2a - 1 = (x - a)^2 - a^2 + 2a - 1$
이므로 $x = a$ 일 때 최솟값 $-a^2 + 2a - 1$ 을 가진다.
$\therefore m = -a^2 + 2a - 1 = -(a - 1)^2$
따라서 m 은 $a = 1$ 일 때, 최댓값 0 을 가진다.

12. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 4a - 4$의 최댓값을 M이라 할 때, M의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

$y = -x^2 - 2ax + 4a - 4 = -(x+a)^2 + a^2 + 4a - 4$
이므로 $x = -a$일 때 최댓값 $a^2 + 4a - 4$를 가진다.
$\therefore M = a^2 + 4a - 4 = (a+2)^2 - 8$
따라서 M은 $a = -2$일 때 최댓값 -8을 가진다.

13. 함수 $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$t = x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면
$y = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 \cdots$ ㉠
또, $t = (x - 1)^2 + 2$ 이므로
$t \geq 2 \cdots$ ㉡
㉡의 범위에서 ㉠의 최솟값은
$t = 2$일 때 1이다.

14. 함수 $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 3) + 3x^2 - 6x$ 의 최솟값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 - 2x + 2 = t$ 로 놓으면
$t = (x-1)^2 + 1 \geq 1$ 이고

$$\begin{aligned} f(x) &= g(t) = t(t+1) + 3t - 6 \\ &= t^2 + 4t - 6 \\ &= (t+2)^2 - 10 \ (t \geq 1) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은
$g(1) = (1+2)^2 - 10 = -1$

15. 두 함수 $f(x)=x^2-6x-5$, $g(x)=3x+2$ 에 대하여 $F(x)=f(g(x))$ 라 정의하자.
$-2 \le x \le 3$ 에서 $F(x)$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M-m$ 의 값은?

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

해설

$t=g(x)=3x+2$ 라 놓으면
$-2 \le x \le 3$ 에서 $-4 \le t \le 11 \cdots$ ㉠
$F(x)=f(t)=t^2-6t-5=(t-3)^2-14$
㉠의 범위에서
$t=3$ 일 때 $m=-14$
$t=11$ 일 때 $M=50$
$\therefore\ M-m=50-(-14)=64$

16. $f(x) = x^2 - x + 1$ 일 때, $0 \le x \le 1$ 에서 $f(4 - f(x))$ 의 최솟값은?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

$f(4 - f(x))$ 에서 $4 - f(x) = t$ 라 두면,

$t = -x^2 + x + 3$

$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$ $(0 \le x \le 1)$ 에서

$3 \le t \le \frac{13}{4}$

따라서

$$\begin{aligned} f(4 - f(x)) &= f(t) = t^2 - t + 1 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(3 \le t \le \frac{13}{4}\right) \end{aligned}$$

$t = 3$ 일 때, 최솟값 7을 갖는다.

17. 실수 x, y 가 $x^2 - y^2 = 4$ 를 만족할 때, $2x - y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2 - y^2 = 4$ 에서 $y^2 = x^2 - 4 \cdots\cdots$ ㉠

이 때, $y^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 - 4 \geq 0$

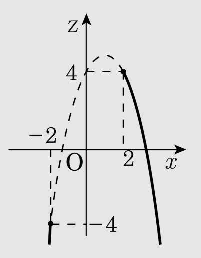
$\therefore\ x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$

$2x - y^2 = 2x - (x^2 - 4) = -x^2 + 2x + 4$

$= -(x-1)^2 + 5$

$f(x) = -(x-1)^2 + 5$ 로 놓으면

$x \leq -2,\ x \geq 2$ 에서 함수 $z = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



따라서 $x = 2$ 일 때 최댓값은 4 이다.

18. $x+y=3, x \geq 0, y \geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$y=3-x \geq 0$
$\therefore\ 0 \leq x \leq 3$
$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$
$x=1$ 일 때, $m=6$
$x=3$ 일 때, $M=18$
$\therefore\ M-m=12$

19. $x^2+2y^2=4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $4x+2y^2$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① -8　② -4　③ 0　④ 4　⑤ 8

해설

$x^2+2y^2=4$에서 $2y^2=4-x^2$
이때, y는 실수이므로 $2y^2=4-x^2 \geq 0$
$\therefore -2 \leq x \leq 2$
$4x+2y^2=4x+4-x^2=-(x-2)^2+8$
$(-2 \leq x \leq 2)$
따라서 $x=-2$일 때, 최솟값 $m=-8$이고,
$x=2$일 때, 최댓값 $M=8$이므로 $M+m=0$

20. x, y가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$
$= -(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 3$
$= -(x - 1)^2 - (y - 2)^2 + 8$
$x,\ y$는 실수이므로 $(x - 1)^2 \geq 0,\ (y - 2)^2 \geq 0$
따라서 $2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$은
$x - 1 = 0,\ y - 2 = 0$일 때 최댓값 8을 갖는다.

21. x, y가 실수일 때, $x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$
$= (x-3)^2 + 2(y+1)^2 - 4$이므로
$x = 3,\ y = -1$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

22. x, y, z가 실수일 때, $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$의 최솟값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$
$= (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 - 1$
이 때, x, y, z가 실수이므로
$(x+1)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0,\ (z-4)^2 \geq 0$
$\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25 \geq -1$
따라서 $x = -1,\ y = 3,\ z = 4$일 때,
주어진 식의 최솟값은 -1이다.

23. x, y가 실수일 때, $-x^2-y^2-4x+6y-12$의 최댓값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$-x^2-y^2-4x+6y-12=-(x+2)^2-(y-3)^2+1$
이 때, x, y가 실수이므로
$(x+2)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0$
$\therefore -x^2-y^2-4x+6y-12 \leq 1$
따라서 $x=-2,\ y=3$일 때
주어진 식의 최댓값은 1이다.

24. 실수 x, y 가 방정식 $4x^2+y^2-16x+2y+13=0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값과 최솟값을 구하면 ?

① 최댓값 1, 최솟값 -3
② 최댓값 3, 최솟값 -1
③ 최댓값 3, 최솟값 1
④ 최댓값 -1, 최솟값 -3
⑤ 최댓값 4, 최솟값 -1

해설

x에 관해 내림차순으로 정리하면
$4x^2-16x+y^2+2y+13=0$
실수의 해를 가지므로
$\frac{D}{4}=(-8)^2-4(y^2+2y+13)\geq 0$
$\therefore\ y^2+2y-3\leq 0$
$\therefore\ (y+3)(y-1)\leq 0$
$\therefore\ -3\leq y\leq 1$
따라서, 최댓값은 1, 최솟값은 -3

25. $x^2 + y^2 = 5$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x - y$ 는 $x = \alpha, y = \beta$ 에서 최댓값 m을 갖는다. 이때, $m + \alpha + \beta$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$2x - y = k$로 놓으면
$y = 2x - k \cdots$ ㉠
㉠을 $x^2 + y^2 = 5$에 대입하면
$x^2 + (2x - k)^2 = 5$
$\therefore 5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉡
㉡을 x에 대한 이차방정식으로 보면
x가 실수이므로
$\frac{D}{4} = 4k^2 - 5(k^2 - 5)\ 0$, $k^2 \le 25$
$\therefore -5 \le k \le 5$
따라서 k의 최댓값은 5이다.
이 때의 x, y의 값은
㉡에서 $5x^2 - 20x + 20 = 0$, $5(x - 2)^2 = 0 \therefore x = 2$
㉠에서 $y = 4 - 5 = -1$
따라서, $m = 5, \alpha = 2, \beta = -1$ 이므로
$m + \alpha + \beta = 6$

26. 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2+2x+3}$ 의 함수값 중 가장 작은 정수를 m, 가장 큰 정수를 M이라 할 때, $m+M$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2+2x+3}=y$라 놓고,

양변에 x^2+2x+3을 곱하면

$2x^2-4x+1=y(x^2+2x+3)$

$(y-2)x^2+2(y+2)x+3y-1=0$

x가 실수이므로

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(y+2)^2-(y-2)(3y-1)\geq 0$

$2y^2-11y-2\leq 0$

$\therefore \dfrac{11-\sqrt{137}}{4}\leq y\leq \dfrac{11+\sqrt{137}}{4}$

$11<\sqrt{137}<12$이므로

$-0.\times\times\times\leq y\leq 5.\times\times\times$

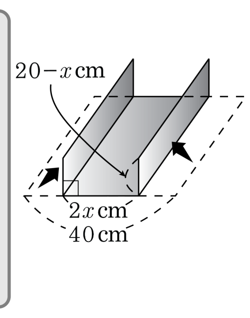
따라서 $m=0, M=5$이므로 $m+M=5$

27. 너비가 40 cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 될 때, 높이를 구하면?

① 10 ② 8 ③ 6 ④ 4 ⑤ 2

해설

직사각형의 가로를 $2x$ 라 하면 세로는 $20-x$ 이다.
단면의 넓이는
$2x(20-x) = -2x^2+40x = -2(x^2-20x+200)+100 = -2(x-10)^2+200$
$\therefore\ x = 10$ 일 때 넓이가 최대이다.



28. 둘레의 길이가 40 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대가 될 때, 반지름의 길이 및 최대 넓이 S 를 구하여라.

▶ 답 : $\underline{\quad\quad\quad\quad \text{cm}^2}$

▷ 정답 : 100 $\underline{\text{cm}^2}$

해설

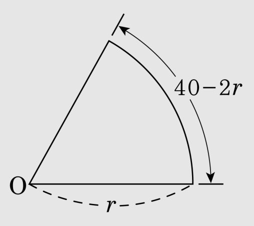
부채꼴의 반지름의 길이를 $r$cm 라 하면

$S = \frac{1}{2} \times r \times (40 - 2r) = r(20 - r)$

$= -r^2 + 20r = -(r - 10)^2 + 100$

한편 $r > 0$ 이고 $40 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 20$

따라서 $y = 10$ 일 때 최대 넓이는 100m^2 이다.



29. $x^2-xy+y^2+2y=0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 의 최댓값은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ 2 ④ $\frac{11}{5}$ ⑤ 4

해설

주어진 식을 y 에 대하여 정리하면
$y^2+(2-x)y+x^2=0$
이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.
$D=(2-x)^2-4\cdot x^2\geq 0$,
$3x^2+4x-4\leq 0$, $(x+2)(3x-2)\leq 0$
$\therefore -2\leq x\leq \frac{2}{3}$
따라서 x 의 최댓값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

30. $-1 \le x \le 1$ 에서 함수 $y = (x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x) + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

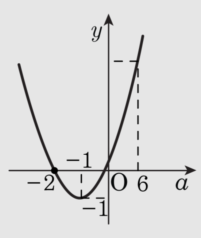
$x^2 + 2x = t$ 로 놓으면, $t = (x+1)^2 - 1$ 이므로
$-1 \le x \le 1$ 에서 $-1 \le t \le 3$
이 때, 주어진 함수는 $y = t^2 - 4t + 2 = (t-2)^2 - 2$
즉, $t = 2$ 일 때, y 의 최솟값은 -2 이고,
$t = -1$ 일 때, y 의 최댓값은 7 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.

31. 이차방정식 $x^2+(a+2)x+2a+4=0$ 의 두 실근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ 의 최솟값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-(a+2)$, $\alpha\beta=2a+4$ 이므로
$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$
$=(a+2)^2-(2a+4)=a^2+2a=(a+1)^2-1$
또한, 주어진 이차방정식이 실근을 가지므로
$D=(a+2)^2-4(2a+4)\geq 0$
$a^2-4a-12\geq 0$, $(a+2)(a-6)\geq 0$
$\therefore a\leq -2$, $a\geq 6$
따라서, $y=(a+1)^2-1$ 의 그래프는 다음의 그림과 같다.



그러므로 $a=-2$ 일 때$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ 의 최솟값은 0 이다.