1. 이차함수 $y = 12x - (1+3x)(1-3x)$ 가 $x = p$ 에서 최소이고 최솟값은 q 일 때, $p+q$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{17}{3}$　② $-\frac{5}{3}$　③ 0　④ $\frac{8}{3}$　⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$y = 12x - (1+3x)(1-3x) = 9x^2 + 12x - 1$

$= 9\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 5 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5$

따라서, $x = -\frac{2}{3}$ 일 때 최소이고

최솟값은 -5 이므로

$p = -\frac{2}{3}$, $q = -5$

$\therefore p + q = -\frac{17}{3}$

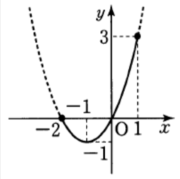
2. $-2 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, $-2 \le x \le 1$ 에서
$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.
즉, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$
따라서, $x = 1$ 일 때 최댓값 3,
$x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로
구하는 합은 $3 - 1 = 2$



3. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 는 $x=1$ 일 때 최대이고 최댓값은 16 이다. 또, 그래프가 x 축과 만나는 두 점을 A, B 라고 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}=8$ 이다. 이 때, $|a|+|b|+|c|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$y=ax^2+bx+c$ 는 $x=1$ 일 때
최대이고 최댓값은 16 이므로
$y=ax^2+bx+c=a(x-1)^2+16=ax^2-2ax+a+16\ (a<0)$
$\therefore b=-2a,\ c=a+16(a<0)\ \cdots\cdots$ ㉠
$ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라고 하면

$$\overline{\mathrm{AB}}=|\beta-\alpha|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}\ \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $\dfrac{\sqrt{4a^2-4a(a+16)}}{-a}=8$

$\therefore\ \sqrt{-64a}=-8a$ 양변을 제곱하면
$-64a=64a^2,\quad a^2=-a,\ a(a+1)=0$
그런데 $a<0$ 이므로 $a=-1$
$\therefore b=-2a=2,\ c=a+16=15$
$\therefore |a|+|b|+|c|=18$

4. 이차함수 $y = ax^2 + 2x + 4 + 2a$ ($a \neq 0$)의 최댓값이 3 일 때, a 의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

이차함수에서 최댓값을 가지려면 이차항의 계수 a 의 부호는 음수이다.
주어진 식을 변형 하면

$$y = a\left\{x^2 + \frac{2}{a}x + \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{a}\right)^2\right\} + 4 + 2a$$

$$= a\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + 4 + 2a - \frac{1}{a}$$

따라서 $x = -\frac{1}{a}$ 일 때,

최댓값 $4 + 2a - \frac{1}{a} = 3$ 을 가진다.

$4 + 2a - \frac{1}{a} = 3$ 에서 $2a - \frac{1}{a} + 1 = 0$

$2a^2 + a - 1 = 0$, $(a + 1)(2a - 1) = 0$

$\therefore a = -1$ 또는 $a = \frac{1}{2}$

$a = -1(\because\ a < 0)$

5. x가 실수일 때, 이차함수$y = ax^2 + bx + c$ 가 $x = 2$ 에서 최댓값 3 을 가질 때, <보기> 에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $a < 0$　　ㄴ $4a + b = 0$　　ㄷ $4a - c = -3$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$x = 2$ 에서 최댓값 3 을 갖는 이차함수는
$y = a(x-2)^2 + 3(a < 0)$ 이다.
$ax^2 + bx + c = a(x-2)^2 + 3$ 이므로
$b = -4a$, $c = 4a + 3$ 이다.

6. $0 \le x \le 3$ 에서 이차함수 $y = -4x^2 + 4x + a$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 10 일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① $\frac{11}{2}$ ② 11 ③ $\frac{33}{2}$ ④ 22 ⑤ $\frac{55}{2}$

해설

$y = -4x^2 + 4x + a = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a + 1$

$0 \le x \le 3$ 이므로 $x = \frac{1}{2}$ 일 때,

최댓값을 갖고 최댓값은 $a + 1$ 이다.

$x = 3$ 일 때, 최솟값을 갖고

최솟값은 $a - 24$ 이다.

최댓값과 최솟값의 합이 10 이므로

$(a + 1) + (a - 24) = 10$

$\therefore a = \frac{33}{2}$

7. x 에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+9-2a^2=0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$ 의 최소값은? (단, a 는 실수)

① 12 ② 9 ③ 6 ④ 3 ⑤ 2

해설

$x^2+2ax+9-2a^2=0$ 에서
근과 계수와의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-2a,\ \alpha\beta=9-2a^2$
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=8a^2-18$

또 α, β 는 실근이므로 $\dfrac{D}{4}=a^2-(9-2a^2)\geq 0$

$\therefore a^2\geq 3$
따라서 $a^2=3$ 일 때, $\alpha^2+\beta^2$ 은 최소이고
최소값은 6 이다.

8. x의 값의 범위가 $2 \leq x \leq 4$ 인 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + 1$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$y = -2x^2 + 4x + 1 = -2(x-1)^2 + 3$ 이므로
$2 \leq x \leq 4$ 에서 $x = 2$ 일 때 최댓값1,
$x = 4$ 일 때 최솟값 -15를 가진다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $1 + (-15) = -14$

9. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$
$= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2$
따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$
$g(a) = -(a-2)^2 + 6$ 에서
$g(a)$ 의 최댓값은 6 이다.

10. $0 \le x \le 3$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - ax$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 최댓값은? (단, $0 \le a \le 2$)

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\ (0 \le x \le 3)$$

$0 \le \frac{a}{2} \le 1$ 이므로

최솟값 $m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4}$,

최댓값 $M = f(3) = 9 - 3a$

$\therefore M + m = 9 - 3a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}(a+6)^2 + 18$

이때, $0 \le a \le 2$ 이므로

$M + m$ 은 $a = 0$ 일 때 최댓값 9 를 갖는다.

11. 이차함수 $y=x^2-2ax+2a-1$의 최솟값을 m이라 할 때, m의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y=x^2-2ax+2a-1=(x-a)^2-a^2+2a-1$
이므로 $x=a$일 때 최솟값 $-a^2+2a-1$을 가진다.
$\therefore m=-a^2+2a-1=-(a-1)^2$
따라서 m은 $a=1$일 때, 최댓값 0을 가진다.

12. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 4a - 4$의 최댓값을 M이라 할 때, M의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$y = -x^2 - 2ax + 4a - 4 = -(x+a)^2 + a^2 + 4a - 4$

이므로 $x = -a$일 때 최댓값 $a^2 + 4a - 4$를 가진다.

$\therefore M = a^2 + 4a - 4 = (a+2)^2 - 8$

따라서 M은 $a = -2$일 때 최댓값 -8을 가진다.

13. 함수 $y=(x^2-2x+3)^2-2(x^2-2x+3)+1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$t=x^2-2x+3$ 으로 놓으면

$y=t^2-2t+1=(t-1)^2 \cdots$ ㉠

또, $t=(x-1)^2+2$ 이므로

$t \geq 2 \cdots$ ㉡

㉡의 범위에서 ㉠의 최솟값은

$t=2$일 때 1이다.

14. 함수 $f(x)=(x^2-2x+2)(x^2-2x+3)+3x^2-6x$ 의 최솟값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2-2x+2=t$ 로 놓으면

$t=(x-1)^2+1\geq 1$ 이고

$$\begin{aligned} f(x)=g(t)&=t(t+1)+3t-6 \\ &=t^2+4t-6 \\ &=(t+2)^2-10 \ (t\geq 1) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은

$g(1)=(1+2)^2-10=-1$

15. 두 함수 $f(x) = x^2 - 6x - 5,\ g(x) = 3x + 2$ 에 대하여 $F(x) = f(g(x))$ 라 정의하자.
$-2 \le x \le 3$ 에서 $F(x)$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

해설

$t = g(x) = 3x + 2$ 라 놓으면
$-2 \le x \le 3$ 에서 $-4 \le t \le 11 \cdots$ ㉠
$F(x) = f(t) = t^2 - 6t - 5 = (t-3)^2 - 14$
㉠의 범위에서
$t = 3$ 일 때 $m = -14$
$t = 11$ 일 때 $M = 50$
$\therefore\ M - m = 50 - (-14) = 64$

16. $f(x) = x^2 - x + 1$ 일 때, $0 \le x \le 1$ 에서 $f(4 - f(x))$ 의 최솟값은?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

$f(4 - f(x))$ 에서 $4 - f(x) = t$ 라 두면,

$t = -x^2 + x + 3$

$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$ $(0 \le x \le 1)$ 에서

$3 \le t \le \frac{13}{4}$

따라서

$$f(4 - f(x)) = f(t) = t^2 - t + 1$$
$$= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(3 \le t \le \frac{13}{4}\right)$$

$t = 3$ 일 때, 최솟값 7을 갖는다.

17. 실수 x, y 가 $x^2 - y^2 = 4$ 를 만족할 때, $2x - y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2 - y^2 = 4$ 에서 $y^2 = x^2 - 4 \cdots\cdots$ ㉠

이 때, $y^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 - 4 \geq 0$

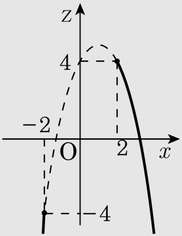
$\therefore\ x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$

$2x - y^2 = 2x - (x^2 - 4) = -x^2 + 2x + 4$

$= -(x-1)^2 + 5$

$f(x) = -(x-1)^2 + 5$ 로 놓으면

$x \leq -2,\ x \geq 2$ 에서 함수 $z = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



따라서 $x = 2$ 일 때 최댓값은 4 이다.

18. $x+y=3, x \geq 0, y \geq 0$일 때, $2x^2+y^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면 $M-m$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$y=3-x \geq 0$

$\therefore\ 0 \leq x \leq 3$

$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$

$x=1$일 때, $m=6$

$x=3$일 때, $M=18$

$\therefore\ M-m=12$

19. $x^2 + 2y^2 = 4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $4x + 2y^2$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M + m$의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x^2 + 2y^2 = 4$에서 $2y^2 = 4 - x^2$

이때, y는 실수이므로 $2y^2 = 4 - x^2 \geq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 2$

$4x + 2y^2 = 4x + 4 - x^2 = -(x-2)^2 + 8$

$(-2 \leq x \leq 2)$

따라서 $x = -2$일 때, 최솟값 $m = -8$이고,

$x = 2$일 때, 최댓값 $M = 8$이므로 $M + m = 0$

20. x, y가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$

$= -(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 3$

$= -(x - 1)^2 - (y - 2)^2 + 8$

$x,\ y$는 실수이므로 $(x - 1)^2 \geq 0,\ (y - 2)^2 \geq 0$

따라서 $2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$은

$x - 1 = 0,\ y - 2 = 0$일 때 최댓값 8을 갖는다.

21. x, y가 실수일 때, $x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$
$= (x-3)^2 + 2(y+1)^2 - 4$이므로
$x = 3,\ y = -1$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

22. x, y, z가 실수일 때, $x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$의 최솟값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$

$=(x+1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1$

이 때, x, y, z가 실수이므로

$(x+1)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0,\ (z-4)^2 \geq 0$

$\therefore x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25 \geq -1$

따라서 $x=-1,\ y=3,\ z=4$일 때,

주어진 식의 최솟값은 -1이다.

23. x, y가 실수일 때, $-x^2-y^2-4x+6y-12$의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$-x^2-y^2-4x+6y-12=-(x+2)^2-(y-3)^2+1$

이 때, x, y가 실수이므로

$(x+2)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0$

$\therefore -x^2-y^2-4x+6y-12 \leq 1$

따라서 $x=-2,\ y=3$일 때

주어진 식의 최댓값은 1이다.

24. 실수 x, y 가 방정식 $4x^2+y^2-16x+2y+13=0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값과 최솟값을 구하면 ?

① 최댓값 1, 최솟값 -3
② 최댓값 3, 최솟값 -1
③ 최댓값 3, 최솟값 1
④ 최댓값 -1, 최솟값 -3
⑤ 최댓값 4, 최솟값 -1

해설

x에 관해 내림차순으로 정리하면
$4x^2-16x+y^2+2y+13=0$
실수의 해를 가지므로
$$\frac{D}{4}=(-8)^2-4(y^2+2y+13)\geq 0$$
$\therefore\ y^2+2y-3\leq 0$
$\therefore\ (y+3)(y-1)\leq 0$
$\therefore\ -3\leq y\leq 1$
따라서, 최댓값은 1, 최솟값은 -3

25. $x^2+y^2=5$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x-y$는 $x=\alpha, y=\beta$에서 최댓값 m을 갖는다. 이때, $m+\alpha+\beta$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$2x-y=k$로 놓으면

$y=2x-k \cdots$ ㉠

㉠을 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(2x-k)^2=5$

$\therefore 5x^2-4kx+k^2-5=0 \cdots$ ㉡

㉡을 x에 대한 이차방정식으로 보면

x가 실수이므로

$\frac{D}{4}=4k^2-5(k^2-5)\ 0$, $k^2 \le 25$

$\therefore -5 \le k \le 5$

따라서 k의 최댓값은 5이다.

이 때의 x, y의 값은

㉡에서 $5x^2-20x+20=0$, $5(x-2)^2=0$ $\therefore x=2$

㉠에서 $y=4-5=-1$

따라서, $m=5, \alpha=2, \beta=-1$이므로

$m+\alpha+\beta=6$

26. 실수 x 에 대하여 함수 $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 3}$ 의 함수값 중 가장 작은 정수를 m, 가장 큰 정수를 M 이라 할 때, $m + M$ 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\dfrac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 3} = y$ 라 놓고,

양변에 $x^2 + 2x + 3$ 을 곱하면

$2x^2 - 4x + 1 = y(x^2 + 2x + 3)$

$(y - 2)x^2 + 2(y + 2)x + 3y - 1 = 0$

x 가 실수이므로

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$\dfrac{D}{4} = (y + 2)^2 - (y - 2)(3y - 1) \geq 0$

$2y^2 - 11y - 2 \leq 0$

$\therefore \dfrac{11 - \sqrt{137}}{4} \leq y \leq \dfrac{11 + \sqrt{137}}{4}$

$11 < \sqrt{137} < 12$ 이므로

$-0.\times\times\times \leq y \leq 5.\times\times\times$

따라서 $m = 0, M = 5$ 이므로 $m + M = 5$

27. 너비가 40 cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 될 때, 높이를 구하면?

① 10 ② 8 ③ 6 ④ 4 ⑤ 2

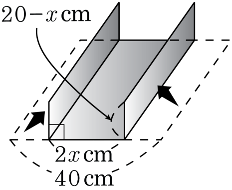
해설

직사각형의 가로를 $2x$ 라 하면 세로는 $20-x$ 이다.

단면의 넓이는

$2x(20-x) = -2x^2+40x = -2(x^2-20x+200)+100 = -2(x-10)^2+200$

$\therefore \quad x=10$ 일 때 넓이가 최대이다.



28. 둘레의 길이가 40 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대가 될 때, 반지름의 길이 및 최대 넓이 S 를 구하여라.

▶ 답 : $\underline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \text{cm}^2}$

▷ 정답 : $100\,\underline{\text{cm}^2}$

해설

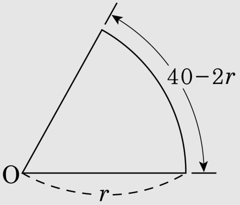
부채꼴의 반지름의 길이를 $r$cm 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times r \times (40 - 2r) = r(20 - r)$$

$$= -r^2 + 20r = -(r - 10)^2 + 100$$

한편 $r > 0$ 이고 $40 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 20$

따라서 $y = 10$ 일 때 최대 넓이는 100m^2 이다.



29. $x^2-xy+y^2+2y=0$ 을 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 x 의 최댓값은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ 2 ④ $\frac{11}{5}$ ⑤ 4

해설

주어진 식을 y 에 대하여 정리하면

$y^2+(2-x)y+x^2=0$

이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$D=(2-x)^2-4\cdot x^2 \geq 0,$

$3x^2+4x-4 \leq 0,\ \ (x+2)(3x-2) \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq \dfrac{2}{3}$

따라서 x 의 최댓값은 $\dfrac{2}{3}$ 이다.

30. $-1 \le x \le 1$ 에서 함수 $y = (x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x) + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$x^2 + 2x = t$ 로 놓으면, $t = (x+1)^2 - 1$ 이므로
$-1 \le x \le 1$ 에서 $-1 \le t \le 3$
이 때, 주어진 함수는 $y = t^2 - 4t + 2 = (t-2)^2 - 2$
즉, $t = 2$ 일 때, y 의 최솟값은 -2 이고,
$t = -1$ 일 때, y 의 최댓값은 7 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.

31. 이차방정식 $x^2+(a+2)x+2a+4=0$ 의 두 실근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ 의 최솟값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(a+2)$, $\alpha\beta=2a+4$ 이므로

$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$

$=(a+2)^2-(2a+4)=a^2+2a=(a+1)^2-1$

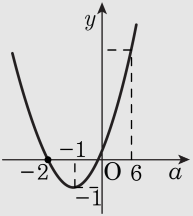
또한, 주어진 이차방정식이 실근을 가지므로

$D=(a+2)^2-4(2a+4)\geq 0$

$a^2-4a-12\geq 0$, $(a+2)(a-6)\geq 0$

$\therefore a\leq -2$, $a\geq 6$

따라서, $y=(a+1)^2-1$ 의 그래프는 다음의 그림과 같다.



그러므로 $a=-2$ 일 때 $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ 의 최솟값은 0 이다.