

1. $f(x) = x^2 - ax + 1$ 이 $x - 1$ 로 나누어 떨어질 때 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$$f(1) = 1^2 - a \cdot 1 + 1 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

2. x 에 대한 다항식 $4x^3 - 3x^2 + ax + b$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 갖도록 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -37

해설

$P(x) = 4x^3 - 3x^2 + ax + b$ 라 하고 $P(x)$ 가
 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 가지려면
 $P(-1) = P(3) = 0$
 $P(-1) = -4 - 3 - a + b = 0 \quad \therefore a - b = -7$
 $P(3) = 108 - 27 + 3a + b = 0 \quad \therefore 3a + b = -81$
 $\therefore a = -22, b = -15$

3. $x = 2009, y = 7440$ 일 때, $\frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ -1 ④ i ⑤ $-i$

해설

주어진 식을 정리하면

$$\begin{aligned} & \frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi} \\ &= \frac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)} \\ &= \frac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{xy + y^2i - x^2i + xy} = 0 \end{aligned}$$

따라서 구하는 값은 0

4. 두 복소수 $z_1 = a + (3b - 1)i$, $z_2 = (b + 1) - 5i$ 에 대하여 $z_1 = \bar{z}_2$ 가 성립할 때, 실수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$a + (3b - 1)i = (b + 1) + 5i$ 에서

$$\begin{cases} a = b + 1 \\ 3b - 1 = 5 \end{cases} \quad \text{이므로 연립하면}$$

$$a = 3, b = 2$$

$$\therefore a + b = 5$$

5. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(a-m-1)x + a^2 - b + m^2 = 0$ 의 근이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4} = (a - m - 1)^2 - (a^2 - b + m^2) = 0$$

m 의 값에 관계없이

$$2(-a + 1)m + (-2a + b + 1) = 0$$

이어야 하므로

$$2(-a + 1) = 0, -2a + b + 1 = 0$$

$$\therefore a = 1, b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

6. x 에 대한 이차식 $2x^2 + (k+1)x + k - 1$ 이 완전제곱식이 될 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2x^2 + (k+1)x + k - 1$ 이 완전제곱식이므로

$$D = (k+1)^2 - 8(k-1) = 0$$

$$(k-3)^2 = 0$$

$$\therefore k = 3$$

7. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x 의 범위가 $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 6 ⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow y = (x - 1)^2 - 3$
 $-2 \leq x \leq 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,
 $x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.
 $\therefore$ 최댓값 : $(-2 - 1)^2 - 3 = 6$

8. 두 다항식 A, B 에 대하여 연산 Δ, ∇ 를 $A\Delta B = 2A + B$, $A\nabla B = A - 3B$ 로 정의한다.

$A = 2 + 3x^2 - x^3$, $B = x^2 + 3x + 1$ 일 때 $A\nabla(B\Delta A)$ 를 구하면?

- ① $2x^3 - 18x - 10$
- ② $2x^3 - 12x^2 - 18x - 10$
- ③ $2x^3 + 12x^2 + 18x + 10$
- ④ $2x^3 + 12x^2 + 18x - 10$
- ⑤ $2x^3 - 12x^2 + 18x + 10$

해설

$$\begin{aligned} A\nabla(B\Delta A) &= A\nabla(2B + A) \\ &= A - 3(2B + A) = -2A - 6B \end{aligned}$$

위와 같이 식을 간단히 정리한 후 A, B 에 대입하여 정리한다.

9. 다항식 $f(x) = 4x^3 + ax^2 + x + 1$ 을 $x + \frac{1}{2}$ 로 나누면 나머지가 1 일 때, 다항식 $f(x)$ 를 $2x + 1$ 로 나눈 몫 $Q(x)$ 와 나머지 R 을 구하면?

① $Q(x) = 2x^2 - x, R = 1$

② $Q(x) = 2x^2 + x, R = 1$

③ $Q(x) = 2x^2 - 2x, R = 1$

④ $Q(x) = 4x^2 - 2x, R = \frac{1}{2}$

⑤ $Q(x) = 4x^2 + 2x, R = \frac{1}{2}$

해설

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 = \frac{a}{4} \therefore a = 4$$

$$\begin{aligned}\text{따라서 } f(x) &= 4x^3 + 4x^2 + x + 1 \\ &= x(4x^2 + 4x + 1) + 1 \\ &= x(2x + 1)^2 + 1\end{aligned}$$

$$2x + 1 \text{ 로 나누면 } Q(x) = 2x^2 + x, R = 1$$

10. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + y)(y + z)(z + x)$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$x + y + z = 1$ 에서

$x + y = 1 - z$

$y + z = 1 - x$

$z + x = 1 - y$

$(x + y)(y + z)(z + x) = (1 - z)(1 - x)(1 - y)$

$= 1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx) - xyz$

$= 1 - 1 + 2 - 3 = -1$

11. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore ab+bc+ca = -\frac{1}{2}$$

$$4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$= 4\{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)\}$$

$$= 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

12. x 에 대한 삼차식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 이 $x^2 + 1$ 로 나누어떨어질 때, 상수 a, b 의 값을 정하면?

① $a = -1, b = 3$

② $a = 1, b = 3$

③ $a = 3, b = -1$

④ $a = -3, b = -1$

⑤ $a = 3, b = 1$

해설

$$\begin{aligned}x^3 + ax^2 + bx + 3 &= (x^2 + 1)(x + c) \\ &= x^3 + cx^2 + x + c\end{aligned}$$

$$\therefore a = c, b = 1, c = 3$$

$$\therefore a = 3, b = 1$$

13. 다음 □안에 들어갈 식이 바르게 연결되지 않은 것은?

$$\begin{aligned} & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\ &= (b-c)a^2 - \boxed{\text{가}} a + \boxed{\text{나}}(b-c) \\ &= \boxed{\text{다}} \{a^2 - \boxed{\text{라}} a + \boxed{\text{나}}\} \\ &= (b-c)(a-b)\boxed{\text{마}} \end{aligned}$$

- ① (가) $(b^2 - c^2)$ ② (나) bc ③ (다) $(b - c)$
- ④ (라) $(b + c)$ ⑤ (마) $(c - a)$

해설

$$\begin{aligned} & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\ &= (b-c)a^2 + b^2c - ab^2 + c^2a - bc^2 \\ &= (b-c)a^2 - \boxed{(b^2 - c^2)} a + \boxed{bc}(b-c) \\ &= \boxed{(b-c)} \{a^2 - \boxed{(b+c)} a + \boxed{bc}\} \\ &= (b-c)(a-b)\boxed{(a-c)} \end{aligned}$$

14. 방정식 $|x| + |x - 1| = 9$ 의 모든 근의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -20

해설

$|x| + |x - 1| = 9$ 에서

i) $x < 0$ 일 때,

$$-x - x + 1 = 9$$

$$\therefore x = -4$$

ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,

$$x - x + 1 = 9 \text{ (성립하지 않음)}$$

iii) $x \geq 1$ 일 때,

$$x + x - 1 = 9$$

$$\therefore x = 5$$

따라서 모든 근의 곱은

$$(-4) \times 5 = -20$$

15. 이차방정식 $x^2 - 14kx + 96k = 0$ 의 두 근의 비가 3 : 4일 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 2$

해설

두 근을 3α , 4α 라고 하면
근과 계수의 관계에 의하여
 $3\alpha + 4\alpha = 14k \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $3\alpha \cdot 4\alpha = 96k \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$ 에서 $7\alpha = 14k \therefore \alpha = 2k \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉡}$ 에서 $12\alpha^2 = 96k \therefore \alpha^2 = 8k \cdots \cdots \textcircled{㉣}$
 $\textcircled{㉢}$ 을 $\textcircled{㉣}$ 에 대입하면 $4k^2 = 8k$, $4k(k - 2) = 0$
 $\therefore k = 0$ 또는 $k = 2$
따라서 양수 k 의 값은 $k = 2$ 이다.

16. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2a$ 의 그래프는 x 축과 두 점 A, B 에서 만나고 $\overline{AB} = 2$ 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

A(α , 0), B(β , 0) ($\alpha < \beta$) 이라 하면
 α, β 는 이차방정식 $x^2 + ax + 2a = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의
관계에 의하여
 $\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = 2a \quad \cdots \textcircled{1}$
이 때, $\overline{AB} = 2$ 이므로
 $\beta - \alpha = 2$ 양변을 제곱하면
 $(\beta - \alpha)^2 = 4$
 $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 \quad \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 정리하면 $a^2 - 8a - 4 = 0$
따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 8 이다

17. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3}$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 일 때 $x^2 - y^2 + z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3} = t \text{ 라 하면}$$

$$x = 2t - 1, y = 5t + 3, z = 3t - 2 \text{ 이므로}$$

$$x^2 - y^2 + z^2 = (2t - 1)^2 - (5t + 3)^2 + (3t - 2)^2 = -12t^2 - 46t - 4$$

... ㉠

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$t \geq \frac{1}{2}, t \geq -\frac{3}{5}, t \geq \frac{2}{3}$$

$$\therefore t \geq \frac{2}{3}$$

이 범위에서 ㉠은 감소하므로

$$t = \frac{2}{3} \text{ 일 때 최대이고 최댓값은}$$

$$-12\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 46 \cdot \frac{2}{3} - 4 = -40$$

18. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ 을 풀면?

① $x=18, y=-1$ 또는 $x=2, y=3$

② $x=-2, y=-3$ 또는 $x=2, y=3$

③ $x=\frac{18}{5}, y=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=2, y=3$

④ $x=\frac{18}{5}, y=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=-2, y=-3$

⑤ $x=-\frac{18}{5}, y=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=-2, y=-3$

해설

$$\begin{cases} 2x+y=7 \cdots \textcircled{A} \\ x^2+y^2=13 \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

$y=-2x+7$ 를 $\textcircled{B}$ 식에 대입

$$x^2+(2x-7)^2=13$$

$$5x^2-28x+36=(5x-18)(x-2)=0$$

$$\begin{cases} x=\frac{18}{5}, y=-\frac{1}{5} \\ x=2, y=3 \end{cases}$$

19. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x) + g(x)$ 를 $x^2 + x + 1$ 으로 나누면 나머지가 9, $f(x) - g(x)$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나누면 나머지가 -3이다. 이 때, $f(x)$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$f(x) + g(x) = (x^2 + x + 1)Q_1(x) + 9 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(x) - g(x) = (x^2 + x + 1)Q_2(x) - 3 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$2f(x) = (x^2 + x + 1) \{Q_1(x) + Q_2(x)\} + 6$$

$$f(x) = (x^2 + x + 1) \frac{Q_1(x) + Q_2(x)}{2} + 3$$

$\therefore$ 나머지는 3

20. $a-b=1+i, b-c=1-i$ 일 때, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 의 값은?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

$a-b=1+i \cdots \cdots \textcircled{A}$

$b-c=1-i \cdots \cdots \textcircled{B}$

$\textcircled{A}+\textcircled{B}$ 을 계산하면 $a-c=2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$

$=\frac{1}{2}((1+i)^2+(1-i)^2+(-2)^2)$

$=\frac{1}{2}(1+2i-1+1-2i-1+4)$

$=2$

21. 이차함수 $y = -x^2 - 6x - 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 $2m$ 만큼 평행이동한 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 때, 정수 m 의 최솟값은?

- ① 2
- ② 1
- ③ 0
- ④ -1
- ⑤ -2

해설

$y = -x^2 - 6x - 3$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로
 $2m$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y - 2m = -(x - m)^2 - 6(x - m) - 3$
즉, $y = -x^2 + 2(m - 3)x - m^2 + 8m - 3$ 이
그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
 $\frac{D}{4} = (m - 3)^2 - m^2 + 8m - 3 > 0$
 $2m + 6 > 0$
 $\therefore m > -3$
따라서 정수 m 의 최솟값은 -2 이다.

22. x 의 3차방정식 $x^3 - (3k+1)x + 3k = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 k 의 값들의 합은?

- ㉠ $\frac{7}{12}$ ㉡ $\frac{7}{5}$ ㉢ $\frac{7}{4}$ ㉣ $\frac{7}{3}$ ㉤ $\frac{7}{2}$

해설

주어진 식의 좌변을 인수분해하면

$$(x-1)(x^2+x-3k)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x^2+x-3k=0$$

여기에서 $x^2+x-3k=0$ 이 중근을 가질 때는 $D=1+12k=0$

$$\therefore k=-\frac{1}{12}$$

또, $x^2+x-3k=0$ 이 $x=1$ 이라는 근을 가져도 그 근은 중근이 되므로

$$1+1-3k=0$$

$$\therefore k=\frac{2}{3}$$

$$\therefore -\frac{1}{12} + \frac{2}{3} = \frac{-1+8}{12} = \frac{7}{12}$$

23. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$ 이 $x = -1 + \sqrt{2}$ 를 한 근으로 가질 때, $2a - b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x = -1 + \sqrt{2}$ 에서 $x + 1 = \sqrt{2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 + 2x - 1 = 0$
 $\therefore x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = (x^2 + 2x - 1)(x^2 + cx + 5)$
 $= x^4 + (2 + c)x^3 + (4 + 2c)x^2 + (10 - c)x - 5$
 $\therefore 2 + c = 5, 4 + 2c = a, 10 - c = b$
 $\therefore a = 10, b = 7, c = 3$

24. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=xy \\ \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=0 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 의 합 $x+y$ 의 값은?
(단, $xy \neq 0$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 0$ 에서

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} \text{ 이므로}$$

$x+y=u, xy=v$ 라 하면

주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u-v=0 \cdots \textcircled{1} \\ \frac{u^2-2v}{v}=0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①을 ②에 대입하면

$$\frac{u^2-2v}{v} = \frac{v(v-2)}{v} = 0$$

$\therefore v=0$ 또는 $v=2$

그런데 주어진 조건에서

$v=xy \neq 0$ 이므로 $v=2$ 이다.

따라서, ①에서 $u=v=2$ 이므로

$x+y=2$

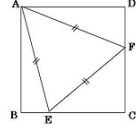
25. 세 개의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ 이 오직 하나의 공통 실근을 가질 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

공통 실근을 α 라 하면
 $a\alpha^2+b\alpha+c=0 \cdots (\text{i})$
 $b\alpha^2+c\alpha+a=0 \cdots (\text{ii})$
 $c\alpha^2+a\alpha+b=0 \cdots (\text{iii})$
 $(\text{i})+(\text{ii})+(\text{iii})$ 하면
 $(a+b+c)(\alpha^2+\alpha+1)=0$
 α 가 실수일 때 $\alpha^2+\alpha+1>0$
 $\therefore a+b+c=0$

26. 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 ABCD 가 있다. 변 BC, CD 위에 각각 점 E, F 를 잡아 $\triangle AEF$ 가 정삼각형이 되도록 할 때, $\overline{BE}$ 의 길이를 구하면?



- ☒ ① $4 - 2\sqrt{3}$ ② $3 - \sqrt{3}$ ③ $3 - 2\sqrt{2}$
 ④ $3 - \sqrt{2}$ ⑤ $2 - \sqrt{2}$

해설

$\overline{BE} = \overline{DF} = x$, $\overline{EC} = \overline{FC} = y$ 라 하면,
 $x + y = 2$
 $\overline{AE}$ 는 ($\triangle ABE$ 가 직각삼각형이므로)
 $\overline{AE} = \sqrt{4+x^2}$
 $\overline{EF}$ 는 ($\triangle EFC$ 가 직각이등변삼각형이므로)
 $\overline{EF} = \sqrt{2}y$
 $\triangle AEF$ 는 정삼각형이므로
 $\overline{AE} = \overline{EF}$
 $\Rightarrow \sqrt{4+x^2} = \sqrt{2}y \Leftrightarrow 4+x^2 = 2y^2$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 4+x^2=2y^2 \end{cases}$$

 을 연립하여 풀면 $x = 4 - 2\sqrt{3}$

27. 다음 중 $\left(\frac{997}{1000}\right)^3 + \left(\frac{3}{1000}\right)^3 - 1$ 의 값과 같은 것은?

① $\frac{3^2 \times 997^3}{10}$
 ④ $-\frac{3^2 \times 997}{10^6}$

② $\frac{3^2 \times 997^6}{10}$
 ⑤ $-\frac{3^2 \times 997^9}{10}$

③ $-\frac{3^2 \times 997^3}{10}$

해설

주어진 식에서 $\frac{997}{1000}$ 과 $\frac{3}{1000}$ 을 더해보면 $\frac{997+3}{1000} = 1$ 이므로

$a = \frac{997}{1000}$, $b = \frac{3}{1000}$, $c = -1$ 이라 하면

$a + b + c = 0$ 이 된다.

따라서 $a + b + c = 0$ 이므로

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \text{ 에서 } a^3+b^3+c^3 = 3abc$$

임을 이용하면

$$a^3 + b^3 + c^3 = \left(\frac{997}{1000}\right)^3 + \left(\frac{3}{1000}\right)^3 + (-1)^3 \text{ 의 값은}$$

$$3abc = 3 \times \frac{997}{1000} \times \frac{3}{1000} \times (-1) \text{ 와 같으므로}$$

구하는 값은

$$3 \times \frac{997}{1000} \times \frac{3}{1000} \times (-1) = -\frac{3^2 \times 997}{10^6}$$

28. $10^{20} - 4$ 과 $10^{30} - 8$ 의 최대공약수는 몇 자리의 자연수인가?

① 10자리

② 11자리

③ 12자리

④ 13자리

⑤ 14자리

해설

$$\begin{aligned}10^{20} - 4 &= (10^{10})^2 - 2^2 \\&= (10^{10} - 2)(10^{10} + 2) \\10^{30} - 8 &= (10^{10})^3 - 2^3 \\&= (10^{10} - 2)(10^{20} + 10^{10} \times 2 + 4) \\\therefore \text{최대 공약수는 } &2(10^{10} - 2) = 2 \cdot 10^{10} - 4 \\\therefore &11\text{자리수}\end{aligned}$$

29. $(z - \bar{z}) \times i$ 가 음수이고 $\frac{z}{1+z^2}$ 와 $\frac{z^2}{1+z}$ 이 모두 실수일 때, z^2 의 값은?
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

- ① $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ② $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ③ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 ④ $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ⑤ $1 + i$

해설

$z = a + bi, \bar{z} = a - bi$
 $(z - \bar{z}) \times i < 0$ 에서 $-2b < 0 \therefore b > 0$
 $\frac{z}{1+z^2}$ 가 실수이므로
 $\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$
 $\therefore z(1+\bar{z}^2) = \bar{z}(1+z^2) \Leftrightarrow (z\bar{z} - 1)(z - \bar{z}) = 0$
 $\therefore z\bar{z} = 1$ ($\because z - \bar{z} \neq 0$)
 $a^2 + b^2 = 1 \dots \textcircled{1}$
 한편, $\frac{z^2}{1+z}$ 이 실수이므로
 $\frac{z^2}{1+z} = \overline{\left(\frac{z^2}{1+z}\right)} = \frac{\bar{z}^2}{1+\bar{z}}$
 $\Leftrightarrow z^2(1+\bar{z}) = \bar{z}^2(1+z)$
 $\Leftrightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z} + z\bar{z}) = 0$
 $\therefore z + \bar{z} = -z\bar{z} = -1$ ($\because z - \bar{z} \neq 0$)
 $2a = -1 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because b > 0$)
 $\therefore z^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

30. 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자. 3의 배수가 아닌 정수 n 에 대하여 α^n, β^n 을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 + (\textcircled{㉔})x + (\textcircled{㉕}) = 0$ 이다. ㉔와 ㉕에 알맞은 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

α, β 는 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이므로
 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \beta^2 + \beta + 1 = 0$
 $\therefore \alpha^3 = 1, \beta^3 = 1$
한편, 근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$
㉠ : $n = 3k + 1$ (k 는 정수)일 때,
 $\alpha^n + \beta^n = (\alpha^3)^k \cdot \alpha + (\beta^3)^k \cdot \beta$
 $= \alpha + \beta = -1$
㉡ : $n = 3k + 2$ (k 는 정수)일 때,
 $\alpha^n + \beta^n = (\alpha^3)^k \alpha^2 + (\beta^3)^k \beta^2$
 $= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
 $= 1 - 2 = -1$
㉠, ㉡에서 n 이 3의 배수가 아니면
 $\alpha^n + \beta^n = -1, \alpha^n \beta^n = (\alpha\beta)^n = 1$
따라서 α^n, β^n 을 두 근으로 하는 이차방정식은
 $x^2 + x + 1 = 0 \therefore \textcircled{㉔} = 1, \textcircled{㉕} = 1$

31. 실계수 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 α 는 허수이고, $\frac{\beta^2}{\alpha}$ 은 실수이다. 이 때, $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3$ 의 값은?

- ① 0 ② -1 ③ 1 ④ i ⑤ $-i$

해설

α 가 근이므로 $\bar{\alpha}$ 도 근이다.
이차방정식은 두 근을 가지므로
 $\beta = \bar{\alpha}, \bar{\beta} = \alpha \cdots \cdots$ ①
 $\frac{\beta^2}{\alpha}$ 이 실수이므로, $\frac{\beta^2}{\alpha} = \overline{\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)}$
 $\therefore \bar{\alpha}\beta^2 = \alpha\bar{\beta}^2$
①에 의하여 $\beta\beta^2 = \alpha\alpha^2$
 $\therefore \beta^3 = \alpha^3$
 $\therefore \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 = \frac{\beta^3}{\alpha^3} = 1$

32. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라 할 때, $w^{-2n} + w^{-n} + 1$ 의 값들의 합을 구하면?
(단, n : 양의 정수)

- ① 0
- ② 3
- ③ 4
- ④ 1
- ⑤ -1

해설

$w^3 = 1, w^2 + w + 1 = 0$ 이므로
(i) $n = 3k$ 일 때
(준식) $= (w^3)^{-2k} + (w^3)^{-k} + 1 = 3$
(ii) $n = 3k + 1$ 일 때
(준식) $= (w^3)^{-2k} \cdot w^{-2} + (w^3)^{-k} \cdot w^{-1} + 1$
 $= \frac{w}{w^3} + \frac{w^2}{w^3} + 1 = w^2 + w + 1 = 0$
(iii) $n = 3k + 2$ 일 때
(준식) $= (w^3)^{-2k} \cdot w^{-4} + (w^3)^{-k} \cdot w^{-2} + 1$
 $= \frac{w^2}{w^6} + \frac{w}{w^3} + 1 = w^2 + w + 1 = 0$
 $\therefore n = 3k$ 이면 3, $n \neq 3k$ 이면 0
 $\therefore$ 준식의 값들의 합은 3

33. a 를 정수, n 을 자연수라 할 때, a 가 방정식 $x^4 + 3ax^2 + 2ax - 2 \cdot 3^n = 0$ 의 근이다. $a + n$ 의 값은?

㉠ -1, 2 ㉡ -3, 1 ㉢ 0, 1 ㉣ 0, 2 ㉤ 1, 2

해설

a 가 방정식 $x^4 + 3ax^2 + 2ax - 2 \cdot 3^n = 0$ 의 근이므로

$$a^4 + 3a^3 + 2a^2 = 2 \cdot 3^n$$

$$a^2(a+1)(a+2) = 2 \cdot 3^n$$

a 는 정수, n 은 자연수이므로

$$a^2 = 1 \text{ 또는 } a^2 = 3^n$$

㉠ $a = -1$ 이면 성립하지 않는다.

㉡ $a = 1$ 이면 $n = 1$

㉢ $a = 3$ 이면 좌변은 $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ 이고 우변은 이와 같은 모양이 될 수 없다.

㉤ $a = -3$ 이면 $n = 2$

$$\therefore (a, n) = (-3, 2), (1, 1)$$

$$\therefore a + n = -1, 2$$