1. 다음 함수의 그래프 중 평행이동하여 함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은?

① $y = \sqrt{x}$

② $y = \sqrt{2x+1} - 1$

③ $y = \sqrt{-2x-1} - 1$

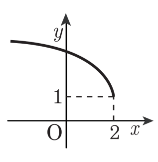
④ $y = -\sqrt{2x} + 1$

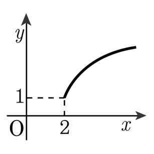
⑤ $y = -\sqrt{-2x}$

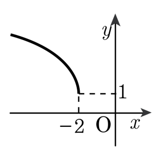
해설

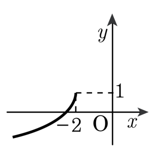
$y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를
x축의 방향으로 m만큼
y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면
$y = \sqrt{2(x-m)} + n = \sqrt{2x-2m} + n$이 된다.

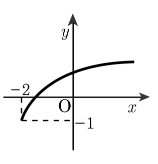
2. 함수 $y = 2\sqrt{-3x+6}+1$ 의 그래프는?

①


②


③


④


⑤


해설

$y = 2\sqrt{-3(x-2)}+1$
$\Rightarrow$ 꼭짓점 : $(2, 1)$
정의역 : $x \le 2$, 치역 : $y \ge 1$

3. $y = \sqrt{4x-12}+5$의 그래프는 함수 $y = 2\sqrt{x}$의 그래프를 x축으로 α, y축으로 β만큼 평행이동한 것이다. $\alpha+\beta$의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = 2\sqrt{x-3}+5$이므로,
이것은 $y = 2\sqrt{x}$의 그래프를
x축 방향으로 3만큼,
y축 방향으로 5만큼
평행이동한 그래프의 함수이다.
즉, $\alpha = 3,\ \beta = 5$
$\therefore\ \alpha+\beta = 8$

4. 함수 $y = \sqrt{-2x+a}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 함수 $y = \sqrt{-2x+4} - 3$의 그래프와 겹쳐졌다. 이 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

▷ 정답: $b = -3$

해설

함수 $y = \sqrt{-2x+a}$의 그래프를
x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼
평행이동한 함수의 그래프의 식은
$y = \sqrt{-2(x-1)+a} + b = \sqrt{-2x+2+a} + b$
이 식이 $y = \sqrt{-2x+4} - 3$과 같으므로
$2 + a = 4,\ b = -3$
$\therefore\ a = 2,\ b = -3$

5. 다음 중 함수 $y = a\sqrt{bx}$ 의 그래프가 그려지는 사분면을 옳게 나타낸 것을 고르면? (단, $ab \neq 0$)

① $ab >$ 0 이면 제 3사분면

② $ab <$ 0 이면 제 4사분면

③ $a < 0, b > 0$ 이면 제 4사분면

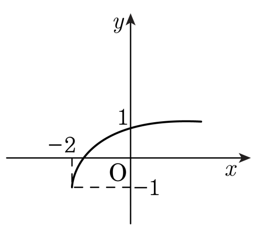
④ $a > 0, b < 0$ 이면 제 1사분면

⑤ $a < 0, b < 0$ 이면 제 2사분면

해설

㉠ $ab > 0 \Leftrightarrow (a > b$ 이고 $b > 0)$ 또는 $(a < 0$ 이고 $b < 0)$ 이므로
제 1사분면 또는 제 3사분면에 그래프가 그려진다.
㉡ $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0$ 이고 $b < 0)$ 또는 $(a < 0$ 이고 $b > 0$)이므로
제 2사분면 또는 제 4사분면에 그래프가 그려진다.
㉢ $a < 0, b > 0$ 이면
제 4사분면에 그래프가 그려진다.
㉣ $a > 0, b < 0$ 이면
제 2사분면에 그래프가 그려진다.
㉤ $a < 0, b < 0$ 이면
제 3사분면에 그래프가 그려진다.

6. 함수 $y = a\sqrt{x+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프와 x 축의 교점의 좌표는? (단, $a,\ b,\ c$ 는 상수)



① $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$　② $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$
③ $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$　④ $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$
⑤ $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$

해설

함수 $y = a\sqrt{x+b}+c$ 의 그래프는
함수 $y = a\sqrt{x}$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 $-b$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼
평행이동 시킨 것이므로 $b = 2,\ c = -1$
$\therefore y = a\sqrt{x+b}+c = a\sqrt{x+2}-1$
한편, 이 그래프는 점 $(0,\ 1)$ 을 지나므로
$1 = a\sqrt{0+2}-1 \quad \therefore a = \sqrt{2}$
따라서, 함수 $y = \sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$ 의 그래프와
x 축의 교점의 x 좌표를 구하면
$0 = \sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$
$\Rightarrow \sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow x+2 = \frac{1}{2}$
$\therefore x = -\frac{3}{2}$

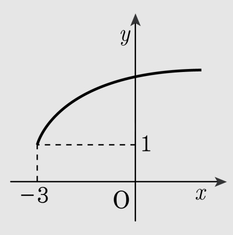
7. 함수 $y = \sqrt{2x+6}+1$ 의 그래프의 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것을 나열하면?

㉠ $y = \sqrt{2x}$를 평행이동한 것이다.
㉡ $y = \sqrt{2x}$를 대칭이동한 것이다.
㉢ 정의역 : $\{x \mid x \geq 3$인 실수$\}$
㉣ 치역 : $\{y \mid y \geq 1$인 실수$\}$

① ㉡, ㉣　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉣

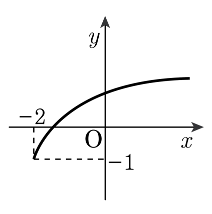
해설

$y = \sqrt{2(x+3)}+1$ 의 그래프는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



㉠ $y = \sqrt{2x}$의 그래프를 x 축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한
것이다.
∴ 참
㉡ $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.
∴ 거짓
㉢ 정의역은 $\{x \mid x \geq -3$인 실수$\}$ 이다.
∴ 거짓
㉣ 치역은 $\{y \mid y \geq 1$인 실수$\}$ 이다.
∴ 참

8. 다음 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 평행 이동한 것이다. 이 그래프의 함수는?



① $y = \sqrt{x-2}+1$

② $y = \sqrt{x-2}-1$

③ $y = \sqrt{x+2}+1$

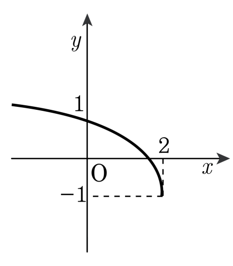
④ $y = \sqrt{x+2}-1$

⑤ $y = -\sqrt{x-2}-1$

해설

x축으로 -2만큼
y축으로 -1만큼 평행이동했으므로
x 대신 $x+2$, y 대신 $y+1$을 대입하면
$y = \sqrt{x+2}-1$

9. 다음 함수의 그래프의 식을 구하면?



① $y = \sqrt{-2x+4} - 1$

② $y = \sqrt{-x+1} - 1$

③ $y = -\sqrt{-2x+4} + 1$

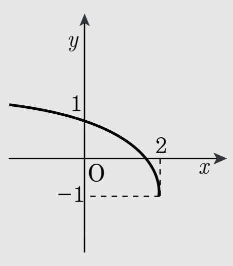
④ $y = \sqrt{x-1} - 1$

⑤ $y = \sqrt{2x-4} + 1$

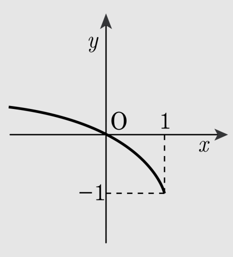
해설

보기의 함수의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

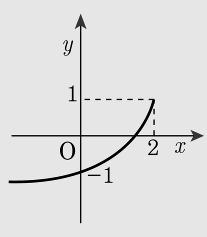
① $y = \sqrt{-2(x-2)} - 1$



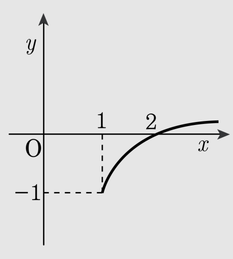
② $y = \sqrt{-(x-1)} - 1$



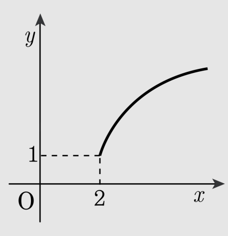
③ $y = -\sqrt{-2(x-2)} + 1$



④ $y = \sqrt{x-1} - 1$



⑤ $y = \sqrt{2(x-2)} + 1$



10. 두 곡선 $y = \sqrt{x+1}$, $x = \sqrt{y+1}$ 의 교점의 좌표를 구하면?

① $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{3}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{3}\right)$ ② $\left(\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{2+\sqrt{5}}{2}\right)$
③ $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ ④ $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$
⑤ $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

해설

두 곡선 $y = \sqrt{x+1}$ 과 $x = \sqrt{y+1}$은
직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로
$y = \sqrt{x+1}$ 과 $y = x$ 의 교점을 구하면 된다.
$\therefore \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

11. 함수 $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ 에서 $f^{-1}(4)$ 의 값은?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

$f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ 에서 $f^{-1}(4) = k$ 로 놓으면
$f(k) = 4$
$\sqrt{k-1} + 2 = 4$, $\sqrt{k-1} = 2$
$k - 1 = 4$ 에서 $k = 5$
$\therefore\ f^{-1}(4) = 5$

12. 함수 $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(3)$ 의 값은?

① 3 ② 2 ③ 0
④ $2 + \sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

$y = \sqrt{x-1} + 2$ 에서
$y - 2 = \sqrt{x-1}$ 이 식의 양변을 제곱하면
$y^2 - 4y + 4 = x - 1$
$x = y^2 - 4y + 4 + 1$
따라서 $g(x) = x^2 - 4x + 5\ (x \geq 2)$ 이므로
$g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$

13. 점 (1, 2) 가 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}$ $(a \neq 0)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프 위에 있을 때, $2a+b$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

무리함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 역함수는 $x = \sqrt{ay+b}$
이 그래프가 점 (1, 2)를 지나므로
$1 = \sqrt{2a+b}$
$\therefore 2a+b=1$

14. 직선 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 위의 한 점 P에서 x축에 평행한 직선을 그어 무리함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프와 만나는 점을 Q라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값을 구하면?

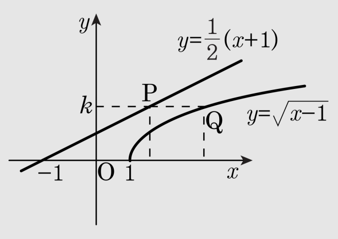
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

무리함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프와

직선 $y=\frac{1}{2}(x+1)$을 좌표평면 위에

나타내면 다음 그림과 같다.



그림에서와 같이 점 P 의 y 좌표를 k 라 하면

① 점 P 의 x좌표는 $k=\frac{1}{2}(x+1)$ 에서

$x=2k-1$

② 점 Q 의 x좌표는 $k=\sqrt{x-1}$ 에서

$x=k^2+1$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=|k^2+1-(2k-1)|$

$=|k^2-2k+2|$

$=|(k-1)^2+1|\geq 1$

따라서, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값은 1이다.

15. 곡선 $y = \sqrt{4x-8}$과 직선 $y = x+k$가 한 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

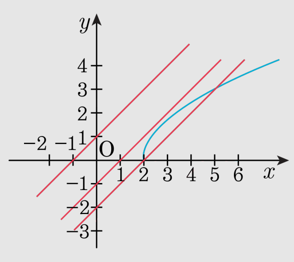
① $k=-2$ 또는 $k>1$　　② $k=-1$ 또는 $k<-2$

③ $k=1$ 또는 $k>2$　　④ $k=2$ 또는 $k<-1$

⑤ $k=-1$

해설

그래프에서 보듯이 한 점에서 만나는 경우는
접하는 경우이거나 $k<-2$ 인 경우이다.



접하는 경우는 $\sqrt{4x-8} = x+k$에서

$4x-8 = x^2+2kx+k^2$

$x^2+2(k-2)x+k^2+8=0$

$\frac{D}{4} = (k-2)^2-(k^2+8) = -4k-4 = 0$에서 $k=-1$

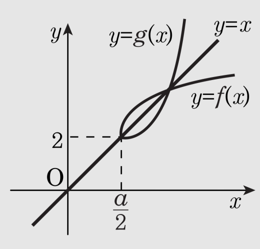
따라서 $k=-1$ 또는 $k<-2$

16. 무리함수 $f(x) = \sqrt{2x-a}+2$의 그래프와 그 역함수 $y = g(x)$의 그래프의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$일 때, a의 값을 구하면?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ 4

해설

다음 그림에서 알 수 있듯
$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$의 그래프의 교점은
$y = f(x)$의 그래프와
직선 $y = x$의 교점과 같다.



두 교점의 좌표를 각각 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\beta,\ \beta)$라 하면
두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2} = 2\sqrt{2}$
$\therefore (\alpha-\beta)^2 = 4 \cdots$ ①
한편, $f(x) = \sqrt{2}x-a+2$ 와
$y = x$ 의 교점의 x 좌표는
$\sqrt{2x-a}+2 = x$에서 $\sqrt{2x-a} = x-2$
양변을 제곱하여 정리하면 $x^2-6x+4+a = 0$
이 이차방정식의 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 이므로
근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta = 6,\ \alpha\beta = 4+a$
$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로 ①에서
$4 = 36-4(4+a),\ 4+a = 8$
$\therefore a = 4$

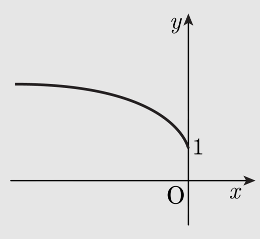
17. 다음 중 무리함수 $y = \sqrt{-3x+1+\sqrt{-12x}}$ 의 정의역과 치역을 차례대로 나타낸 것을 고르면?

① $\{x \mid x \geq 0\}$, $\{y \mid y \geq 1\}$
② $\{x \mid x \leq 0\}$, $\{y \mid y \geq 1\}$
③ $\{x \mid x \geq 1\}$, $\{y \mid y \leq 0\}$
④ $\{x \mid x \leq 1\}$, $\{y \mid y \geq 0\}$
⑤ $\{x \mid x \leq 0\}$, $\{y \mid y \leq 1\}$

해설

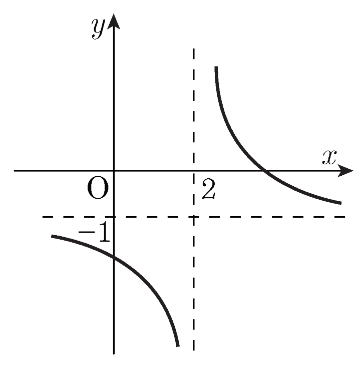
$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{-3x+1+\sqrt{-12x}} \\
&= \sqrt{-3x+1+2\sqrt{(-3x)\cdot 1}} \\
&= \sqrt{-3x}+1
\end{aligned}
$$

따라서 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역 : $\{x \mid x \leq 0\}$,
치역 : $\{y \mid y \geq 1\}$

18. 분수함수 $y = \dfrac{b}{x+a} + c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 무리함수 $y = \sqrt{cx+a} + b$의 그래프가 지나는 사분면을 모두 구하면?



① 제1사분면 ② 제2사분면 ③ 제3사분면

④ 제4사분면 ⑤ 제1, 2사분면

해설

$y = \dfrac{b}{x+a} + c$의 점근선은 $x = -a,\ y = c$

그림에서 $-a > 0,\ c < 0$이고, $b > 0$

$\therefore\ a < 0,\ b > 0,\ c < 0 \cdots$ ㉠

한편 $y = \sqrt{cx+a} + b = \sqrt{c\left(x + \dfrac{a}{c}\right)} + b$이므로

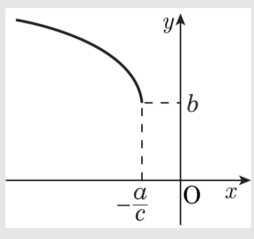
$c\left(x + \dfrac{a}{c}\right) \geq 0$

이때 $c < 0$이므로 $x \leq -\dfrac{a}{c}$

㉠에서 $-\dfrac{a}{c} < 0$이므로 $x < 0$

또 $y = \sqrt{cx+a} + b \geq b$

따라서 그래프는 다음 그림과 같이



제2사분면만을 지난다.