

1. 다음 함수의 그래프 중 평행이동하여 함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은?

① $y = \sqrt{x}$

② $y = \sqrt{2x+1} - 1$

③ $y = \sqrt{-2x-1} - 1$

④ $y = -\sqrt{2x} + 1$

⑤ $y = -\sqrt{-2x}$

해설

$y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를

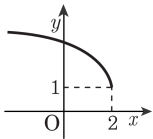
x 축의 방향으로 m 만큼

y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면

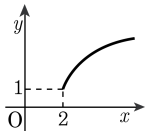
$y = \sqrt{2(x-m)} + n = \sqrt{2x-2m} + n$ 이 된다.

2. 함수 $y = 2\sqrt{-3x+6} + 1$ 의 그래프는?

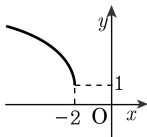
①



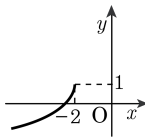
②



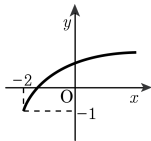
③



④



⑤



해설

$$y = 2\sqrt{-3(x-2)} + 1$$

$\Rightarrow$ 꼭짓점 : (2, 1)

정의역 : $x \leq 2$, 치역 : $y \geq 1$

3. $y = \sqrt{4x - 12} + 5$ 의 그래프는 함수 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축으로 α , y 축으로 β 만큼 평행이동한 것이다. $\alpha + \beta$ 의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = 2\sqrt{x-3} + 5$ 이므로,
이것은 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를
 x 축 방향으로 3만큼,
 y 축 방향으로 5만큼
평행이동한 그래프의 함수이다.
즉, $\alpha = 3$, $\beta = 5$
 $\therefore \alpha + \beta = 8$

4. 함수 $y = \sqrt{-2x+a}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하였더니 함수 $y = \sqrt{-2x+4} - 3$ 의 그래프와 겹쳐졌다. 이 때, 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = -3$

해설

함수 $y = \sqrt{-2x+a}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 b 만큼
평행이동한 함수의 그래프의 식은

$$y = \sqrt{-2(x-1)+a+b} = \sqrt{-2x+2+a+b}$$

이 식이 $y = \sqrt{-2x+4} - 3$ 과 같으므로

$$2+a=4, \quad b=-3$$

$$\therefore a=2, \quad b=-3$$

5. 다음 중 함수 $y = a\sqrt{bx}$ 의 그래프가 그려지는 사분면을 옳게 나타낸 것을 고르면? (단, $ab \neq 0$)

① $ab > 0$ 이면 제 3사분면

② $ab < 0$ 이면 제 4사분면

③ $a < 0, b > 0$ 이면 제 4사분면

④ $a > 0, b < 0$ 이면 제 1사분면

⑤ $a < 0, b < 0$ 이면 제 2사분면

해설

㉠ $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \text{ 이고 } b > 0) \text{ 또는 } (a < 0 \text{ 이고 } b < 0)$ 이므로 제 1사분면 또는 제 3사분면에 그래프가 그려진다.

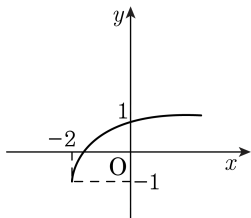
㉡ $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \text{ 이고 } b < 0) \text{ 또는 } (a < 0 \text{ 이고 } b > 0)$ 이므로 제 2사분면 또는 제 4사분면에 그래프가 그려진다.

㉢ $a < 0, b > 0$ 이면 제 4사분면에 그래프가 그려진다.

㉤ $a > 0, b < 0$ 이면 제 2사분면에 그래프가 그려진다.

㉥ $a < 0, b < 0$ 이면 제 3사분면에 그래프가 그려진다.

6. 함수 $y = a\sqrt{x+b} + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프와 x 축의 교점의 좌표는? (단, a, b, c 는 상수)



- ① $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ ② $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$
 ③ $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ ④ $(-\sqrt{2}, 0)$
 ⑤ $(-\sqrt{3}, 0)$

해설

함수 $y = a\sqrt{x+b} + c$ 의 그래프는

함수 $y = a\sqrt{x}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-b$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼

평행이동 시킨 것이므로 $b = 2, c = -1$

$$\therefore y = a\sqrt{x+b} + c = a\sqrt{x+2} - 1$$

한편, 이 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 = a\sqrt{0+2} - 1 \quad \therefore a = \sqrt{2}$$

따라서, 함수 $y = \sqrt{2}\sqrt{x+2} - 1$ 의 그래프와

x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$0 = \sqrt{2}\sqrt{x+2} - 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x+2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2}$$

7. 함수 $y = \sqrt{2x+6} + 1$ 의 그래프의 설명 중 옳지 않은 것을 나열하면?

㉠ $y = \sqrt{2x}$ 를 평행이동한 것이다.

㉡ $y = \sqrt{2x}$ 를 대칭이동한 것이다.

㉢ 정의역 : $\{x \mid x \geq 3 \text{인 실수}\}$

㉤ 치역 : $\{y \mid y \geq 1 \text{인 실수}\}$

① ㉡, ㉤

② ㉠, ㉡

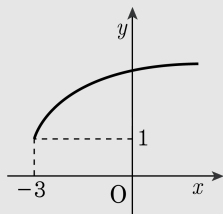
③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉤

해설

$y = \sqrt{2(x+3)} + 1$ 의 그래프는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



㉠ $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

∴ 참

㉡ $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.

∴ 거짓

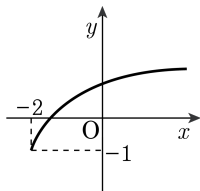
㉢ 정의역은 $\{x \mid x \geq -3 \text{인 실수}\}$ 이다.

∴ 거짓

㉤ 치역은 $\{y \mid y \geq 1 \text{인 실수}\}$ 이다.

∴ 참

8. 다음 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 평행 이동한 것이다. 이 그래프의 함수는?



① $y = \sqrt{x-2} + 1$

② $y = \sqrt{x-2} - 1$

③ $y = \sqrt{x+2} + 1$

④ $y = \sqrt{x+2} - 1$

⑤ $y = -\sqrt{x-2} - 1$

해설

x 축으로 -2만큼

y 축으로 -1만큼 평행이동했으므로

x 대신 $x+2$, y 대신 $y+1$ 을 대입하면

$$y = \sqrt{x+2} - 1$$

9. 다음 함수의 그래프의 식을 구하면?

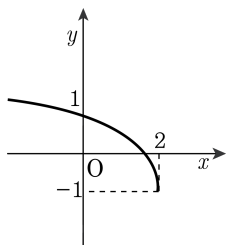
① $y = \sqrt{-2x+4} - 1$

② $y = \sqrt{-x+1} - 1$

③ $y = -\sqrt{-2x+4} + 1$

④ $y = \sqrt{x-1} - 1$

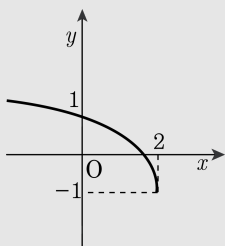
⑤ $y = \sqrt{2x-4} + 1$



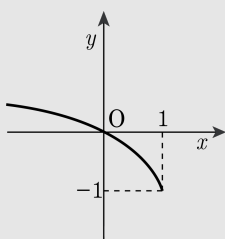
해설

보기의 함수의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

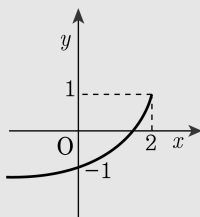
① $y = \sqrt{-2(x-2)} - 1$



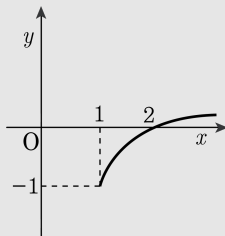
② $y = \sqrt{-(x-1)} - 1$



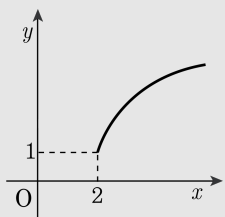
③ $y = -\sqrt{-2(x-2)} + 1$



④ $y = \sqrt{x-1} - 1$



⑤ $y = \sqrt{2(x-2)} + 1$



10. 두 곡선 $y = \sqrt{x+1}$, $x = \sqrt{y+1}$ 의 교점의 좌표를 구하면?

- ① $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{3}, \frac{1+\sqrt{5}}{3}\right)$
③ $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$
⑤ $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

- ② $\left(\frac{2+\sqrt{5}}{2}, \frac{2+\sqrt{5}}{2}\right)$
④ $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

해설

두 곡선 $y = \sqrt{x+1}$ 과 $x = \sqrt{y+1}$ 은

직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$y = \sqrt{x+1}$ 과 $y = x$ 의 교점을 구하면 된다.

$$\therefore \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

11. 함수 $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ 에서 $f^{-1}(4)$ 의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ 에서 $f^{-1}(4) = k$ 로 놓으면

$$f(k) = 4$$

$$\sqrt{k-1} + 2 = 4, \sqrt{k-1} = 2$$

$$k-1 = 4 \text{에서 } k = 5$$

$$\therefore f^{-1}(4) = 5$$

12. 함수 $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(3)$ 의 값은?

① 3

② 2

③ 0

④ $2 + \sqrt{2}$

⑤ 4

해설

$$y = \sqrt{x-1} + 2 \text{ 에서}$$

$$y - 2 = \sqrt{x-1} \text{ 이 식의 양변을 제곱하면}$$

$$y^2 - 4y + 4 = x - 1$$

$$x = y^2 - 4y + 4 + 1$$

$$\text{따라서 } g(x) = x^2 - 4x + 5 \quad (x \geq 2) \text{ 이므로}$$

$$g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$$

13. 점 $(1, 2)$ 가 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}$ ($a \neq 0$) 의 그래프와 그 역함수의 그래프 위에 있을 때, $2a+b$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

무리함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 역함수는 $x = \sqrt{ay+b}$
이 그래프가 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$1 = \sqrt{2a+b}$$

$$\therefore 2a+b=1$$

14. 직선 $y = \frac{1}{2}(x+1)$ 위의 한 점 P에서 x 축에 평행한 직선을 그어 무리함수 $y = \sqrt{x-1}$ 의 그래프와 만나는 점을 Q라 할 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하면?

㉠ 1

㉡ 2

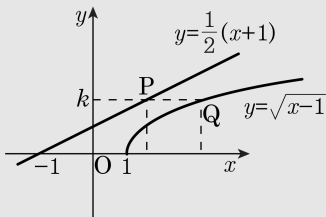
㉢ 3

㉣ 4

㉤ 5

해설

무리함수 $y = \sqrt{x-1}$ 의 그래프와
 직선 $y = \frac{1}{2}(x+1)$ 을 좌표평면 위에
 나타내면 다음 그림과 같다.



그림에서와 같이 점 P의 y 좌표를 k 라 하면

① 점 P의 x 좌표는 $k = \frac{1}{2}(x+1)$ 에서

$$x = 2k - 1$$

② 점 Q의 x 좌표는 $k = \sqrt{x-1}$ 에서

$$x = k^2 + 1$$

$$\therefore \overline{PQ} = |k^2 + 1 - (2k - 1)|$$

$$= |k^2 - 2k + 2|$$

$$= |(k-1)^2 + 1| \geq 1$$

따라서, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 1이다.

15. 곡선 $y = \sqrt{4x-8}$ 과 직선 $y = x+k$ 가 한 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

① $k = -2$ 또는 $k > 1$

② $k = -1$ 또는 $k < -2$

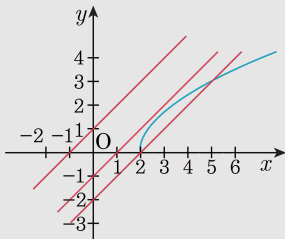
③ $k = 1$ 또는 $k > 2$

④ $k = 2$ 또는 $k < -1$

⑤ $k = -1$

해설

그래프에서 보듯이 한 점에서 만나는 경우는 접하는 경우이거나 $k < -2$ 인 경우이다.



접하는 경우는 $\sqrt{4x-8} = x+k$ 에서

$$4x-8 = x^2 + 2kx + k^2$$

$$x^2 + 2(k-2)x + k^2 + 8 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - (k^2 + 8) = -4k - 4 = 0 \text{에서 } k = -1$$

따라서 $k = -1$ 또는 $k < -2$

16. 무리함수 $f(x) = \sqrt{2x-a} + 2$ 의 그래프와 그 역함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 일 때, a 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\sqrt{2}$

④ 2

⑤ 4

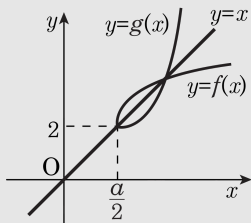
해설

다음 그림에서 알 수 있듯

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점은

$y = f(x)$ 의 그래프와

직선 $y = x$ 의 교점과 같다.



두 교점의 좌표를 각각 (α, α) , (β, β) 라 하면

두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore (\alpha - \beta)^2 = 4 \dots \textcircled{1}$$

한편, $f(x) = \sqrt{2x-a} + 2$ 와

$y = x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\sqrt{2x-a} + 2 = x \text{에서 } \sqrt{2x-a} = x - 2$$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 - 6x + 4 + a = 0$

이 이차방정식의 두 근이 α, β 이므로

근과 계수의 관계에 의해 $\alpha + \beta = 6$, $\alpha\beta = 4 + a$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$4 = 36 - 4(4 + a), 4 + a = 8$$

$$\therefore a = 4$$

17. 다음 중 무리함수 $y = \sqrt{-3x+1} + \sqrt{-12x}$ 의 정의역과 치역을 차례대로 나타낸 것을 고르면?

① $\{x \mid x \geq 0\}, \{y \mid y \geq 1\}$

② $\{x \mid x \leq 0\}, \{y \mid y \geq 1\}$

③ $\{x \mid x \geq 1\}, \{y \mid y \leq 0\}$

④ $\{x \mid x \leq 1\}, \{y \mid y \geq 0\}$

⑤ $\{x \mid x \leq 0\}, \{y \mid y \leq 1\}$

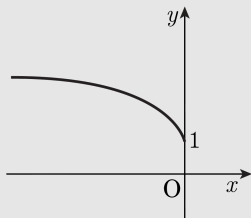
해설

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{-3x+1} + \sqrt{-12x} \\ &= \sqrt{-3x+1} + 2\sqrt{(-3x) \cdot 1} \\ &= \sqrt{-3x+1} \end{aligned}$$

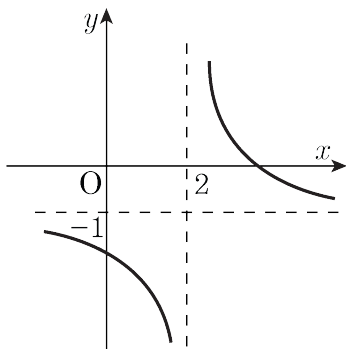
따라서 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

$\therefore$ 정의역 : $\{x \mid x \leq 0\}$,

치역 : $\{y \mid y \geq 1\}$



18. 분수함수 $y = \frac{b}{x+a} + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 무리함수 $y = \sqrt{cx+a} + b$ 의 그래프가 지나는 사분면을 모두 구하면?



- ① 제1사분면 ② 제2사분면 ③ 제3사분면
④ 제4사분면 ⑤ 제1,2사분면

해설

$y = \frac{b}{x+a} + c$ 의 점근선은 $x = -a$, $y = c$

그림에서 $-a > 0$, $c < 0$ 이고, $b > 0$

$\therefore a < 0$, $b > 0$, $c < 0 \cdots \textcircled{1}$

한편 $y = \sqrt{cx+a} + b = \sqrt{c\left(x + \frac{a}{c}\right)} + b$ 이므로

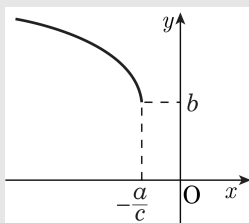
$$c\left(x + \frac{a}{c}\right) \geq 0$$

이때 $c < 0$ 이므로 $x \leq -\frac{a}{c}$

$\textcircled{1}$ 에서 $-\frac{a}{c} < 0$ 이므로 $x < 0$

또 $y = \sqrt{cx+a} + b \geq b$

따라서 그래프는 다음 그림과 같이



제2사분면만을 지난다.