

1. 다음 세 개의 3차방정식의 공통근을 구하여라.

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0, \quad x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0, \\ x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

제 1 식에서 $(x-1)(x+1)(x+3) = 0$

$\therefore x = 1, -1, -3$

제 2 식에서 $(x-1)(x+1)(x+2) = 0$

$\therefore x = 1, -1, -2$

제 3 식에서 $(x-1)^2(x-2) = 0$

$\therefore 1, 2$

$\therefore$ 공통근 : $x = 1$

2. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0 \text{ 에서}$$

$$x^2 - 2x = t \text{ 로 놓으면}$$

$$t(t - 2) - 3 = 0,$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t - 3)(t + 1) = 0$$

$$\therefore t = 3 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \ t = 3, \text{ 즉 } x^2 - 2x = 3 \text{ 일 때}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

$$(ii) \ t = -1, \text{ 즉 } x^2 - 2x = -1 \text{ 일 때}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ (중근)}$$

$$\text{따라서, } -1 \times 3 \times 1 = -3$$

3. 방정식 $(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0$ 의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0 \text{ 에서}$$

$$x^4 + 4x^2 + 4 - 6x^2 - 7 = 0$$

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$$

$x^2 = t$ 로 치환하면

$$t^2 - 2t - 3 = 0, (t - 3)(t + 1) = 0$$

$$\therefore t = 3 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \ x^2 = 3 \text{ 일 때, } x = \pm\sqrt{3}$$

$$(ii) \ x^2 = -1 \text{ 일 때, } x = \pm i$$

(i), (ii) 에서 실근의 합을 구하면

$$\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$$

4. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x = 0$ 을 대입하면

$1 = 0$ 이 되어 모순이므로 $x \neq 0$ 이다.

따라서, 주어진 식의 양변을

x^2 으로 나누면

$$x^2 + 5x - 12 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$$

여기서 $x + \frac{1}{x} = X$ 로 놓으면

$$X^2 + 5X - 14 = 0, (X + 7)(X - 2) = 0$$

$$\therefore X = -7 \text{ 또는 } X = 2$$

(i) $X = -7$ 일 때,

$$x + \frac{1}{x} = -7 \text{에서}$$

$$x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$\therefore \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

(ii) $X = 2$ 일 때,

$$x + \frac{1}{x} = 2 \text{에서}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0, (x - 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = 1$$

(i), (ii)로부터

$$x = 1(\text{중근}) \text{ 또는 } x = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

따라서, 모든 근의 합은

$$1 + \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2} + \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2} = -6 \text{이다.}$$

5. x 의 삼차방정식 $x^3 + px^2 + qx - 105 = 0$ 의 세 근이 모두 2보다 큰 정수일 때, $p + q$ 의 값을 구하면?

① 56

② 21

③ 10

④ -10

⑤ -21

해설

세 근을 α, β, γ 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해서

$$\alpha + \beta + \gamma = -p, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \alpha\beta\gamma = 105$$

마지막 식에서 $\alpha\beta\gamma = 3 \cdot 5 \cdot 7$

$\therefore$ 세 근은 3, 5, 7 이다.

$$\therefore p = -(3 + 5 + 7) = -15,$$

$$q = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 7 \cdot 3 = 15 + 35 + 21 = 71$$

$$\therefore p + q = 56$$

6. 삼차방정식 $x^3 + x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $-3, 1 - \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

- ① -10 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1 - \sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근은 $1 + \sqrt{2}$ 이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$$a = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) + (-3)(1 - \sqrt{2}) + (-3)(1 + \sqrt{2}) = -7$$

$$b = -(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})(-3) = -3$$

$$\therefore a + b = -10$$

7. x 에 관한 삼차방정식 $x^3 - 3x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 할 때 $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 3$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2$, $\alpha\beta\gamma = -4$ 이므로

$$\begin{aligned}(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) &= 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma \\ &= 1 - 3 + 2 + 4 = 4\end{aligned}$$

8. 삼차방정식 $x^3 - mx - 2 = 0$ 의 근이 모두 정수일 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 3$

해설

세 근을 α, β, γ ($\alpha \geq \beta \geq \gamma$) 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -m \quad \dots\dots ②$$

$$\alpha\beta\gamma = 2 \quad \dots\dots ③$$

α, β, γ 는 정수이므로 ③에서

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -1, -1), (1, -1, -2), (2, 1, 1)$$

이 중에서 ①에 맞는 것은

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -1, -1)$$

$$\text{따라서 ②로부터 } -2 + 1 - 2 = -m$$

$$\therefore m = 3$$

9. 실수 x, y, z 가 $x + y + z = 2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $x^3 + y^3 + z^3 = 20$ 을 만족할 때, $x - 2y + z$ 의 값을 구하면? (단, $x < y < z$)

▶ 답 :

▶ 정답 : -1

해설

$$x + y + z = 2 \dots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14 \dots \textcircled{㉡}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 20 \dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서

$$xy + yz + zx = -5 \dots \textcircled{㉣}$$

$$x^3 + y^3 + z^3$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$$

$$= 20$$

$$\therefore xyz = -6 \dots \textcircled{㉤}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉣}, \textcircled{㉤}$ 을 이용하여 x, y, z 를

세 근으로 하는 삼차방정식을 만들면

$$t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0(t - 1)(t + 2)(t - 3) = 0$$

$$t = 1, -2, 3$$

$$x < y < z \text{ 이므로 } x = -2 \ y = 1 \ z = 3$$

$$\therefore x - 2y + z = -1$$

10. 한 근이 $1 + \sqrt{3}i$ 인 방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 과 방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 이 오직 한 개의 공통 실근을 가질 때, $a - b + c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 실수)

① -14

② -13

③ -12

④ -11

⑤ -9

해설

$1 + \sqrt{3}i$ 가 근이므로 $1 - \sqrt{3}i$ 도 근이다. 이때, 또 한 근을 α 라 하면 근과 계수 관계에서

$$(1 + \sqrt{3}i) + (1 - \sqrt{3}i) + \alpha = -a \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) + (1 + \sqrt{3}i)\alpha + (1 - \sqrt{3}i)\alpha = b \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)\alpha = -c \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

또, 방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 과의 공통근이 α 이므로

$$\alpha^2 + a\alpha + 2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

㉠에서 $\alpha = -a - 2$ 를 ㉣에 대입하면

$$(-a - 2)^2 + a(-a - 2) + 2 = 0$$

$$\therefore a = -3, \alpha = 1$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } b = 2\alpha + 4 = 6$$

$$\textcircled{㉢} \text{에서 } c = -4\alpha = -4$$

$$\therefore a - b + c = -3 - 6 - 4 = -13$$