1. 두 직선 $3x+2y+1=0,\ x+3y-2=0$의 교점과 직선 $3x-y+2=0$ 사이의 거리를 구하면?

① $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{5}$

해설

$3x+2y+1=0 \cdots\cdots ㉠$

$x+3y-2=0 \cdots\cdots ㉡$

$㉠-㉡\times 3$에서 $-7y+7=0$

$\therefore\ y=1,\ x=-1$

따라서, 교점의 좌표는 $(-1,1)$이다.

점 $(-1,1)$과 직선 $3x-y+2=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|3\times(-1)-1+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

2. 두 직선 $4x+3y-1=0$ 과 $4x+3y+5=0$ 과의 거리를 d 라 할 때 $5d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

직선 $4x+3y-1=0$ 위의 한 점 이를테면
$(1,\ -1)$ 로부터 직선 $4x+3y+5=0$ 에
이르는 거리를 구하면 되므로

$$\frac{|4\times 1+3\times(-1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{6}{5}$$

$$\therefore 5d=5\times\frac{6}{5}=6$$

3. x축 위의 점 P로부터 직선 $4x+3y+2=0$까지의 거리가 2인 점은 두 개 있다. 이 때, 이 두 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

P의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$이라 하면
P에서 직선까지의 거리가 2이므로
$\dfrac{|4\cdot\alpha+3\cdot 0+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$
$\therefore |4\alpha+2|=10$
$4\alpha+2=\pm 10$
$\therefore \alpha=2,\ -3$
$\therefore$ 거리 l은 $l=2-(-3)=5$

4. 원점에서의 거리가 1이고, 점 $(1,2)$를 지나는 직선의 방정식이 $ax+by+c=0$으로 표현될 때, $a+b+c$의 값을 구하면? (단, $b\neq 0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점 $(1,2)$를 지나는 직선은
$y=m(x-1)+2$ 에서,
$mx-y-m+2=0\cdots$㉠
여기서 $(0,0)$에 이르는 거리가 1이므로
$\dfrac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1,\ |m-2|=\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면, $m=\dfrac{3}{4}$
㉠에 대입하여 정리하면, $\dfrac{3}{4}x-y+\dfrac{5}{4}=0,$
$3x-4y+5=0$
$\therefore\ a+b+c=3-4+5=4$

5. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y-3+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

해설

$x-y-3+k(x+y)=0$ 에서
$(k+1)x+(k-1)y-3=0$
원점에서 이 직선까지의 거리

$$f(k)=\frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2(k^2+1)}}$$

따라서 $f(k)$ 는 분모가 최소일 때 최대가 되므로 $f(k)$ 의 최대값은

$k=0$ 일 때 $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

6. 서로 평행한 두 직선 $2x+y=1$, $2x+y=a$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 a 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점에서 나머지 직선까지의 거리를 계산하면 된다.

$2x+y=1$ 의 $(0,1)$

$$\frac{|2\times 0+1\times 1-a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$$

$|1-a|=5$

$\therefore\ a=6\ (\because\ a>0)$

7. 원점 O 에서 직선 $ax-y+4=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 한다. 선분 OH 의 길이가 2 가 될 때, a^2 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

선분 OH 는 원점과 직선 $ax-y+4=0$ 간의 최단거리이므로,

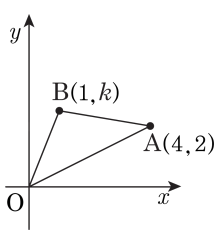
$$\frac{|4|}{\sqrt{a^2+1}} = \overline{OH} = 2$$

$$\sqrt{a^2+1}=2$$

$$a^2+1=4$$

$$\therefore\ a^2=3$$

8. 다음 그림과 같이 O(0, 0), A(4, 2), B(1, k)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이가 4일 때, 양수 k의 값은?



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

해설

직선 OA의 방정식은 $x - 2y = 0$ 이다.
점 B(1, k)에서 직선 $x - 2y = 0$ 까지의 거리
h는 $h = \frac{|1\times 1 - 2\times k|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|1-2k|}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \overline{OA} = 2\sqrt{5}$

$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{|1-2k|}{\sqrt{5}} = 4$

$\therefore\ k = \frac{5}{2}\ (\because k > 0)$