1. $\frac{5}{1+2i}=x+yi$ 를 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x+y=-1$

해설

$$\frac{5}{1+2i}=\frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5(1-2i)}{5}=1-2i$$

$$1-2i=x+yi$$

$$x=1, y=-2, x+y=-1$$

2. 방정식 $|x-1|=2$의 해를 모두 구하여라.

▶ **답 :**

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

▷ **정답 :** -1

해설

i) $x \geq 1$일 때

$|x-1| = x-1$이므로, $x-1=2$

$\therefore x=3$

ii) $x<1$일 때

$|x-1| = -x+1$이므로, $-x+1=2$

$\therefore x=-1$

따라서 (i), (ii)에서 $x=3$ 또는 $x=-1$

3. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 점 $(1, 5)$ 를 지나고, $x = -1$ 일 때 최솟값 -3 을 가진다. 이 때, abc 의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$y = a(x+1)^2 - 3$ 에 $(1,\ 5)$ 를 대입하면 $a = 2$
따라서 $y = 2(x+1)^2 - 3$ 을 전개하면
$y = 2x^2 + 4x - 1$ 이므로 $a = 2,\ b = 4,\ c = -1$
$\therefore \quad abc = -8$

4. 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $a>b,\ c>d$ 이면 $a+c>b+d$ 이다.

㉡ $a>b$ 이면 $a^2>b^2$ 이다.

㉢ $a>b>0$ 이면 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$ 이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $a-b>0,\ c-d>0$ 에서 양변을 더해 정리하면 주어진 식이 나온다.

㉡ $a>0>b$ 인 경우 b의 절댓값이 a 보다 크면 주어진 식은 성립하지 않는다.

㉢ 주어진 식에서 a, b의 부호가 모두 양수이므로 그 역수는 반대가 된다.

5. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \le 0$의 해를 구하면?

① $x \ge 3$ 또는 $x \le -3$

② x는 모든 실수

③ $x \ne 3$인 모든 실수

④ $x = 3$

⑤ 해가 없다

해설

$x^2 - 6x + 9 \le 0$

$(x-3)^2 \le 0$

$\Rightarrow x = 3$

6. 두 점 $A(2,0)$, $B(5,3)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 $2:1$ 로 내분하는 점을 P , $2:1$로 외분하는 점을 Q 라고 할 때, $\overline{PQ}$ 의 길이를 구하면?

① $2\sqrt{2}$　② $\sqrt{10}$　③ 10　④ 4　⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$$\mathrm{P}=\left(\frac{2\times5+1\times2}{3},\frac{2\times3+1\times0}{3}\right)=(4,2)$$

$$\mathrm{Q}=\left(\frac{2\times5-1\times2}{2-1},\frac{2\times3-1\times0}{2-1}\right)=(8,6)$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$$

7. $3\overline{\mathrm{PA}}=2\overline{\mathrm{PB}}$가 되도록 하는 선분 AB 위의 점 P에 대하여 $\mathrm{A}(-3,2)$이고, $\mathrm{P}(1,0)$일 때, 점 B의 x좌표와 y좌표의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$3\overline{\mathrm{PA}}=2\overline{\mathrm{PB}}$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=2:3$이고,

점 P가 선분 AB 위의 점이므로

점 P는 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점이다.

이 때, 점 B의 좌표를 $\mathrm{B}(a,b)$라 하면

$$\left(\frac{2\times a+3\times(-3)}{2+3},\ \frac{2\times b+3\times 2}{2+3}\right)=(1,0)$$

$$\frac{2a-9}{5}=1,\ \frac{2b+6}{5}=0$$

$\therefore\ a=7, b=-3$

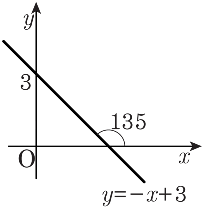
$\therefore\ a+b=4$

8. 함수 $y = -x + 3$ 의 그래프와 x 축의 양의 방향이 이루는 각 θ 는 몇 ° 인지 구하면?

① $45°$ ② $60°$ ③ $120°$ ④ $135°$ ⑤ $150°$

해설

$y = -x + 3$ 를 그리면
기울기 : -1 , y 절편 : 3 이므로
다음 그림과 같다.
이 때, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기 θ 는
$-1 = \tan\theta$ 에서 $\theta = 135°$



9. 다항식 $f(x)=x^3+mx^2+nx+2$ 를 $x-1$ 로 나누면 나누어떨어지고, $x+1$ 로 나누면 나머지가 2 라고 한다. mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(1)=1+m+n+2=0,\ m+n=-3$

$f(-1)=-1+m-n+2=2,\ m-n=1$

두 식을 연립하여 풀면 $m=-1,\ n=-2$

$\therefore\ mn=2$

10. 다항식 $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(0)$ 의 값은?

① $2f(1)-f(2)$

② $2\{f(1)+f(2)\}$

③ $2(1)+f(2)$

④ $4\{f(1)+f(2)\}$

⑤ $4\{f(1)-f(2)\}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

$$R(x)=ax+b,\ \ R(0)=b$$

$$f(1)=a+b,\ \ f(2)=2a+b$$

$$2f(1)-f(2)=b$$

11. 이차항의 계수가 1인 두 이차 다항식의 최대공약수가 $x+3$이고, 최소공배수가 x^3+4x^2+x-6일 때 두 이차식을 구하면?

① $\begin{cases} x^2+x-3 \\ x^2+5x+1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x^2+x-6 \\ x^2+4x+3 \end{cases}$

③ $\begin{cases} x^2+x-2 \\ x^2-x+3 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} x^2+2x-3 \\ x^2+5x+6 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} x^2+4x+3 \\ x^2-x-6 \end{cases}$

해설

$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x+2)(x+3)$

두 이차식은 $(x-1)(x+3)$, $(x+2)(x+3)$에서

x^2+2x-3, x^2+5x+6

12. 이차항의 계수가 1인 두 이차 다항식의 최소공배수가 x^3+6x^2-x-30이고, 최대공약수가 $x-2$일 때, 두 다항식의 합을 바르게 구한 것은?

① $2x^2+4x-16$　② $2x^2+3x-8$　③ x^2-5x-1

④ $2x^2+x+4$　⑤ x^2+2x+5

해설

두 이차 다항식을 $A=a(x-2)$, $B=b(x-2)$ (a, b 는 서로소) 라고 하면

$L=x^3+6x^2-x-30=abG=ab(x-2)$ 이고,

L 을 인수분해하면

$L=(x-2)(x^2+8x+15)=$

$\underbrace{(x-2)}_{G}\underbrace{(x+3)(x+5)}_{ab}$

따라서, 두 다항식은

$(x-2)(x+3)=x^2+x-6$

$(x-2)(x+5)=x^2+3x-10$ 이므로

두 다항식의 합은

$(x^2+x-6)+(x^2+3x-10)=2x^2+4x-16$

13. 두 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$, $x^2+y^2=r^2$ 의 위치 관계가 내접하도록 하는 상수 r 의 값을 구하여라. (단, $r>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 원을

$C_1 : (x-3)^2+(y-4)^2=9 \leftarrow$ 중심 $(3,4)$

$C_2 : x^2+y^2=r^2 (r>0) \leftarrow$ 중심 $(0,0)$

두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 $3, r$ 이고, 중심거리는 $\sqrt{3^2+4^2}=5$ 이다.

이 때, $|r-3|=5$ 이어야 하므로 $r-3=\pm 5$

$\therefore r=8 (\because r>0)$

14. 직선 $x+2y-3=0$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동하면 처음 직선과 일치한다. 이 때 m , n 의 관계식으로 옳은 것은?

① $m+2n=0$ ② $m+2n=1$ ③ $2m+n=0$

④ $2m-n=0$ ⑤ $2m-n\ 1$

해설

직선 $x+2y-3=0$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동하면

$(x-m)+2(y-n)-3=0$

$\therefore x+2y-m-2n-3=0$

이 직선이 처음 직선 $x+2y-3=0$ 과 일치하므로

$-m-2n-3=-3$

$\therefore m+2n=0$

15. 직선 $3x+4y-5=0$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3 만큼 평행 이동시켰을 때, 이 직선의 y절편의 값은?

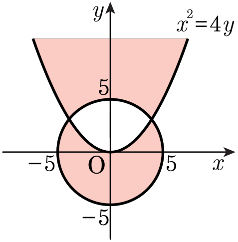
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ 3 ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ -8

해설

x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하므로 $3(x-2)+4(y+3)-5=0$으로 이동한다.

이 직선의 y절편은 $x=0$을 대입하면 $y=-\frac{1}{4}$

16. 다음 중 아래 그림의 어두운 부분을 나타내는 부등식으로 올바른 것은?



① $(x^2-4y)(x^2+y^2-5^2) \le 0$

② $x(x^2-4y)(x^2+y^2-5^2) \ge 0$

③ $(x^2-4y)(x^2+y^2-5^2) \ge 0$

④ $x(x^2-4y)(x^2+y^2-5^2) \le 0$

⑤ $y(x^2+y^2-1)(y-x^2) \ge 0$

해설

① 해 : $\begin{cases} y \le \dfrac{x^2}{4}, \ x^2+y^2 \le 5^2 \\ y \ge \dfrac{x^2}{4}, \ x^2+y^2 \ge 5^2 \end{cases}$ 영역을 그려보면 그림과 같다.

17. 세 개의 부등식 $x \le 2$, $y \le 2$, $x + y \ge 2$를 동시에 만족하는 x, y값에 대하여 일차식 $x - 2y$의 값의 최대, 최소는 얼마인가?

① 최댓값 1, 최솟값 −2

② 최댓값 2, 최솟값 −4

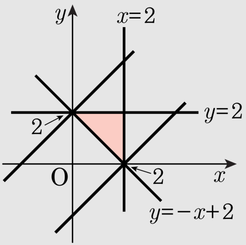
③ 최댓값 4, 최솟값 −2

④ 최댓값 2, 최솟값 −1

⑤ 최댓값 4, 최솟값 −1

해설

세 부등식을 동시에 만족하는 점 (x, y) 영역을 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 $x - 2y = k$로 놓으면 $y = \dfrac{x-k}{2}$

$\therefore\ y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{k}{2} \cdots ①$

이것은 기울기 $\dfrac{1}{2}$인 직선을 나타내며, 영역 내에서 ①을 평행 이동하면 점 $(2,\ 0)$과 $(0,\ 2)$까지 이동한다.

따라서 점 $(2,\ 0)$을 지날 때 최대가 되고, 점 $(0,\ 2)$를 지날 때 최소가 된다.

점 $(2,\ 0)$과 $(0,\ 2)$를 ①에 대입하면,

최댓값 : 2, 최솟값 : −4

18. $\dfrac{2005^3+1}{2005\times2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

$2005=x$ 로 놓으면

$$(\text{준 식})=\frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1}$$

$$=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$

$$=x+1$$

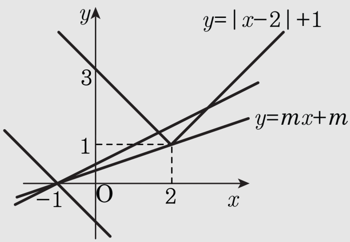
$$=2006$$

19. 함수 $y = |x-2|+1$ 의 그래프가 직선 $y = mx+m$ 과 만나기 위한 양수 m 의 최솟값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

$x \geq 2$ 일 때, $|x-2| = x-2$ 이므로
$y = x-2+1 = x-1$
$x < 2$ 일 때, $|x-2| = -(x-2)$ 이므로 $y = -x+2+1 = -x+3$
따라서, $y = |x-2|+1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



또, 직선 $y = mx+m = m(x+1)$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 0)$ 을 지난다.

직선 $y = mx+m$ 이 점 $(2,\ 1)$ 을 지날 때, $1 = 2m+m \therefore m = \frac{1}{3}$

직선 $y = mx+m$ 이 직선 $y = -x+3$ 과 평행할 때, $m = -1$
따라서, 직선 $y = mx+m$ 이 $y = |x-2|+1$ 의 그래프와 만나려면 기울기 m 의 값의 범위가

$m \geq \frac{1}{3}$ 또는 $m < -1$ 이어야 한다.

그런데 양수 m 이므로 $m \geq \frac{1}{3}$ 그러므로 구하는 m 의 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이다.

20. 원 $x^2+y^2=1$과 직선$ax+by+c=0$에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 모두 양수이고 $b \geq a$)

보기

ㄱ $c=b$이면 두 점에서 만난다.

ㄴ $c=2b$이면 만나지 않는다.

ㄷ $c=\sqrt{a^2+b^2}$이면 한 점에서 만난다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

원의 중심이 $(0,\ 0)$이므로 원의 중심에서 직선 $ax+by+c=0$ 에 이르는 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ㄱ $d=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$ 그러므로 교점은 2개다.

즉, $n(A\cap B)=2$

ㄴ $d=\dfrac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}} \geq \dfrac{2b}{\sqrt{2}b}>1$ $(\because\ b \geq a)$

그러므로 교점은 없다.

ㄷ $d=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$

그러므로 교점은 1 개다.

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

21. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 의 공통접선의 방정식을 구하면?

① $x=-2,\ y=-1$　　② $x=1,\ y=1$

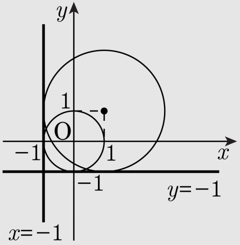
③ $x=-1,\ y=1$　　④ $x=1,\ y=-1$

⑤ $x=-1,\ y=-1$

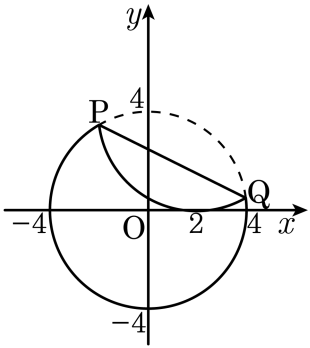
해설

그림을 그려보면 두 개의 공통접선이 존재하고 그 식은 각각

$x=-1,\ y=-1$



22. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 16$을 점 $(2, 0)$에서 x축과 접하도록 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편을 구하여라.

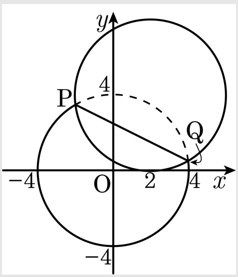


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2, 0)$에서 x과 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$//



이때 선분 PQ는 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은

$x^2 + y^2 - 16 - \{(x-2)^2 + (y-4)^2 - 16\} = 0$

$\therefore x + 2y - 5 = 0$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편은 5이다.

23. 0이 아닌 세 실수 a, b, c가 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c}$를 만족할 때, 이차방정식 $cx^2 + bx + a = 0$의 한 근을 복소수 α라 하자. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$	㉡ $\alpha + \overline{\alpha} = -1$
㉢ $\frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$	㉣ $\alpha^2 = \overline{\alpha}$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉡, ㉢　③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} = k \Rightarrow b = ak,\ c = bk,\ a = ck$

변변끼리 곱하면 $abc = abck^3$

$abc \neq 0$이므로 $k^3 = 1$

$\therefore k = 1 \quad \therefore\ a = b = c$

$cx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$

한 근을 α라 하면 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이다

㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

㉡ $\alpha + \overline{\alpha} = -1$

㉢ $\alpha\overline{\alpha} = 1,\ \frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$

㉣ $x^2 + x + 1 = 0$의 근을 구해보면

$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \overline{\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \alpha^2 = \overline{\alpha}$

24. 함수 f 가 다음 세 조건을 만족한다.

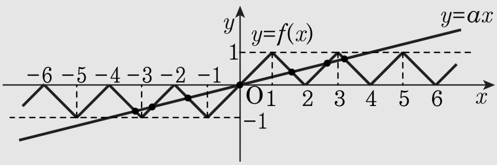
(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ (나) $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = f(x+2)$ (다) $0 \leq x \leq 2$ 일 때, $f(x) = 1 - \lvert x-1 \rvert$

이 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = ax$ 의 교점의 개수가 7 이기 위한 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $-\frac{1}{4} < a < \frac{1}{4}$ ② $0 < a < 2$ ③ $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{4}$
④ $\frac{1}{5} < a < \frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3} < a < 3$

해설

(다) 의 $f(x) = 1 - \lvert x-1 \rvert$ 에서
$0 \leq x < 1$ 일 때, $f(x) = 1 + x - 1 = x$
$1 \leq x \leq 2$ 일 때, $f(x) = 1 - x + 1 = -x + 2$
또, (나) 에서 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = f(x+2)$ 이고, (가) 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



(i) 직선 $y = ax$ 가 점 $(3,\ 1)$ 을 지날 때, $1 = 3a$ 에서 $a = \frac{1}{3}$
이 때, 이 직선과 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는 5 이다.

(ii) 직선 $y = ax$ 가 점 $(5,\ 1)$ 을 지날 때, $1 = 5a$ 에서 $a = \frac{1}{5}$
이 때, 이 직선과 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는 9 이다.
따라서, 직선 $y = ax$ 와 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수가 7 이기 위한 a 의 값의 범위는

$\frac{1}{5} < a < \frac{1}{3}$

25. 서로 다른 세 복소수 $a,\ b,\ c$ 가 $a+b+c=0$,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ 을 만족할 때, $\frac{b}{a}+\frac{\overline{a}}{c}$ 의 값을 구하여라. (단, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$a+b+c=0,\ a+b=-c \quad \cdots$ ①

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0,\ ab+bc+ca=0 \quad \cdots$ ②

②에서 $ab=-c(a+b) \leftarrow$ ①대입

$\therefore\ ab=c^2 \leftarrow$ ㉠

마찬가지로

$bc=a^2-$ ㉡, $ca=b^2-$ ㉢

㉢ ÷ ㉡ : $\frac{a}{b}=\left(\frac{b}{a}\right)^2, \left(\frac{b}{a}\right)^3=1$

㉡ ÷ ㉠ : $\frac{c}{a}=\left(\frac{a}{c}\right)^2, \left(\frac{a}{c}\right)^3=1$

즉, $\frac{b}{a,}\frac{a}{c}$ 는 $t^3=1, (t-1)(t^2+t+1)=0$ 의 근이고 a,b,c 가 서로 다른 수이므로

$\frac{b}{a,}\frac{a}{c}$ 는 $t^2+t+1=0$ 의 근이다.

또한 ㉡에서 $bc=a^2$ 이므로 $\frac{b}{a}=\frac{a}{c}$

$\therefore\ \frac{b}{a}$ 와 $\frac{\overline{a}}{c}$ 는 $t^2+t+1=0$ 의 서로 다른 두 근

$\therefore\ \frac{b}{a}+\frac{\overline{a}}{c}=-1$ (두 근의 합)