1. 이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이 $x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가질 때, 상수 $a,\ b$ 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이
$x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가지므로
$y = a(x - 2)^2 + 5 = ax^2 - 4ax + 4a + 5$
위의 식이 $y = ax^2 + bx - 3$ 과 일치하므로
$-4a = b,\ 4a + 5 = -3$
$\therefore a = -2,\ b = 8$
$\therefore a + b = 6$

2. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$일 때, 상수 k의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = -3x^2 - 6x + k = -3(x^2 + 2x + 1) + k + 3 = -3(x+1)^2 + k + 3$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k+3)$ 이다.
주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.
$\therefore\ k + 3 = \frac{5}{2} \quad \therefore\ k = -\frac{1}{2}$

3. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = -x^2 + 4x \ (1 \le x \le 5)$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 4

▷ 정답 : 최솟값 −5

해설

$y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$

꼭짓점 : $x = 2$ 일 때 $y = 4$

양끝점 : $\begin{cases} x = 1 \text{ 일 때 } y = 3 \\ x = 5 \text{ 일 때 } y = -5 \end{cases}$

$x = 2$ 에서 최댓값 4

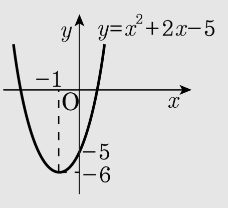
$x = 5$ 에서 최솟값 −5

4. $-2 \le x \le 1$ 일 때, 함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

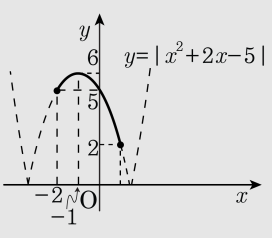
① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

$y = x^2 + 2x - 5 = (x+1)^2 - 6$ 이므로
$y = x^2 + 2x - 5$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



이 때, $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 그래프는 아래 그래프에서 x 축 윗부분은 그대로 두고, x 축 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭 이동한 것과 같다.



따라서 $-2 \le x \le 1$ 에서
함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $y = 6$, 최솟값은 $x = 1$ 일 때 $y = 2$ 이므로
최댓값과 최솟값의 합은 8 이다.

5. 함수 $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$t = x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면
$y = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 \cdots$ ㉠
또, $t = (x - 1)^2 + 2$ 이므로
$t \geq 2 \cdots$ ㉡
㉡의 범위에서 ㉠의 최솟값은
$t = 2$일 때 1이다.

6. $-1 \le x \le 1$ 에서 함수 $y = (x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x) + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

해설

$x^2 + 2x = t$ 로 놓으면, $t = (x+1)^2 - 1$ 이므로
$-1 \le x \le 1$ 에서 $-1 \le t \le 3$
이 때, 주어진 함수는 $y = t^2 - 4t + 2 = (t-2)^2 - 2$
즉, $t = 2$ 일 때, y 의 최솟값은 -2 이고,
$t = -1$ 일 때, y 의 최댓값은 7 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.

7. 실수 x, y가 $2x+y=4$를 만족할 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하면?

① $\frac{16}{5}$　② $\frac{8}{5}$　③ $\frac{4}{5}$　④ $\frac{12}{5}$　⑤ $\frac{17}{5}$

해설

$2x+y=4$ 에서 $y=-2x+4 \cdots$ ㉠

㉠에서 $x^2+y^2 = x^2+(-2x+4)^2$

$= 5x^2-16x+16$

$= 5\left(x^2-\frac{16}{5}x\right)+16$

$= 5\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16}{5}$

따라서 x^2+y^2은 $x=\frac{8}{5}$일 때,

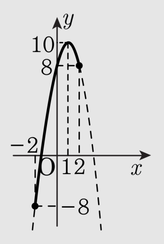
최솟값 $\frac{16}{5}$을 갖는다.

8. $2x^2+y^2=8$ 을 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $4x+y^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$2x^2+y^2=8$ 에서
$y^2=8-2x^2$ 으로 놓으면
$y^2=8-2x^2\geq 0, x^2-4\leq 0$
$\therefore -2\leq x\leq 2$
이 때, $y^2=8-2x^2$ 을 $4x+y^2$ 에 대입하면
$4x+y^2=4x+(8-2x^2)^2=-2(x-1)^2+10$
여기서 $f(x)=4x+y^2=-2(x-1)^2+10$
이라고 하면 $-2\leq x\leq 2$ 이므로
다음 그림에서 $x=1$ 일 때
$f(x)$ 의 최댓값은 10
$x=-2$ 일 때 $f(x)$ 의 최솟값은 $-2(-2-1)^2+10=-8$



따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10+(-8)=2$

9. x, y가 실수일 때, $x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： -4

해설

$x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$
$= (x-3)^2 + 2(y+1)^2 - 4$이므로
$x = 3,\ y = -1$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

10. 둘레의 길이가 40 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대가 될 때, 반지름의 길이 및 최대 넓이 S 를 구하여라.

▶ 답 : $\underline{\qquad\qquad\quad \text{cm}^2}$

▷ 정답 : 100 $\underline{\text{cm}^2}$

해설

부채꼴의 반지름의 길이를 $r$cm 라 하면

$S = \frac{1}{2} \times r \times (40 - 2r) = r(20 - r)$

$= -r^2 + 20r = -(r - 10)^2 + 100$

한편 $r > 0$ 이고 $40 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 20$

따라서 $y = 10$ 일 때 최대 넓이는 100m^2 이다.