

1. 등식 $2x^2 - 3x - 2 = a(x - 1)(x - 2) + bx(x - 2) + cx(x - 1)$ 이 x 에 관한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b, c 에 대하여 $a + 2b + 3c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$-2 = 2a \quad \therefore a = -1$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$-3 = -b \quad \therefore b = 3$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$0 = 2c \quad \therefore c = 0$$

$$\therefore a + 2b + 3c = 5$$

2. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3}$ 을 만족하는 모든 실수 x, y 에 대하여 항상 $ax+by+5 = 0$ 이다. 이때 $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = t$ 라 하면
 $x = 2t - 1, y = 3t + 1$
이것을 $ax + by + 5 = 0$ 에 대입하면
 $a(2t - 1) + b(3t + 1) + 5 = 0$
 $(2a + 3b)t + (-a + b + 5) = 0$
이 식이 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 하므로
 $2a + 3b = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $-a + b + 5 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 를 연립하여 풀면
 $a = 3, b = -2 \quad \therefore a + b = 3 + (-2) = 1$

해설

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC$ 성질 이용
 $3x + 3 = 2y - 2$
 $3x - 2y + 5 = 0$ 은 $ax + by + 5 = 0$
 $\therefore a = 3, b = -2$

3. 다항식 $x^3 + 5x^2 - kx - k$ 가 $x - 1$ 로 나누어 떨어지도록 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

인수정리에 의해서 $x = 1$ 을 대입하면

$$1^3 + 5 \times 1^2 - k \times 1 - k = 0$$

$$\therefore k = 3$$

4. x 에 대한 다항식 $A = 2x^3 + 5x^2 + 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x + 1$ 이고, 나머지가 $-6x + 2$ 이다. 이 때, 다항식 B 를 구하면?

- ① $x^2 + 2x + 2$ ② $x^2 + x + 2$ ③ $x^2 - x + 2$
④ $x^2 - 2x + 2$ ⑤ $x^2 - 3x + 2$

해설

$$\begin{aligned} A &= B(2x + 1) - 6x + 2 \text{ 에서} \\ B(2x + 1) &= 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2 \\ \therefore B &= (2x^3 + 5x^2 + 6x + 2) \div (2x + 1) \\ &= x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

5. $(2x^3 - 3x^2 + 3x + 4)(3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 7x + 8)$ 을 전개한 식에서 x^3 의 계수는?

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

해설

$$2x^3 \times 8 - 3x^2 \times (-7x) + 3x \times (-2x^2) + 4 \times 2x^3 = 39x^3$$

6. $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ 가 $(x-1)(x+2)$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$ 의 값을 정하십시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ 라 놓으면,

$$f(1) = 1 - a + b - 2 = 0$$

$$\therefore -a + b = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$f(-2) = -8 - 4a - 2b - 2 = 0$$

$$\therefore 2a + b = -5 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = -2, b = -1$$

7. $\frac{k}{3}(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)$ 와 같은 것은?

① $\frac{1}{6}(k+1)(k+3)(k+4)$

② $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$

③ $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

④ $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)(k+3)$

⑤ $\frac{1}{4}(k+1)(2k+1)(3k+2)$

해설

$$(k+1)(k+2) = \frac{3}{3}(k+1)(k+2) \text{ 이므로}$$

공통인수 $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)$ 로 묶으면

$$(\text{준 식}) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$

8. 다항식 $(x-1)^3+27$ 을 바르게 인수분해한 것은?

① $(x-1)(x^2+3)$

② $(x-1)(x^2-x-2)$

③ $(x-1)(x^2+3x+3)$

④ $(x+2)(x^2+x+7)$

⑤ $(x+2)(x^2-5x+13)$

해설

$x-1$ 을 A 로 치환하면

$$\text{준식} = A^3 + 27 = (A+3)(A^2-3A+9)$$

다시 $x-1$ 을 대입하면 $(x+2)(x^2-5x+13)$

9. $(a+1)(a^2-a+1) = a^3+1$ 을 이용하여 $\frac{1999^3+1}{1998 \times 1999+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2000

해설

$a = 1999$ 라 하면

$$1998 \times 1999 + 1 = (a-1)a + 1 = a^2 - a + 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1999^3+1}{1998 \times 1999+1} &= \frac{a^3+1}{a^2-a+1} \\ &= \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1} \\ &= a+1 = 2000 \end{aligned}$$

10. 사차식 $3x^4 - 5x^2 + 4x - 7$ 을 이차식 A 로 나누었더니 몫이 $x^2 - 2$ 이고 나머지가 $4x - 5$ 일 때, 이차식 A 를 구하면?

① $3x^2 - 2$

② $3x^2 - 1$

③ $3x^2$

④ $3x^2 + 1$

⑤ $3x^2 + 2$

해설

$$\text{검산식 : } 3x^4 - 5x^2 + 4x - 7 = A(x^2 - 2) + 4x - 5$$

$$A = \frac{3x^4 - 5x^2 - 2}{x^2 - 2} = 3x^2 + 1$$

11. 다항식 $2x^2 + 5ax - a^2$ 을 다항식 $P(x)$ 로 나눈 몫이 $x + 3a$, 나머지가 $2a^2$ 일 때, 다항식 $(x + a)P(x)$ 를 나타낸 것은?

① $x^2 + 2ax - 2a^2$

② $x^2 - a^2$

③ $2x^2 + 3ax + a^2$

④ $2x^2 - 3ax - a^2$

⑤ $2x^2 + ax - a^2$

해설

$2x^2 + 5ax - a^2 = P(x)(x + 3a) + 2a^2$ 이므로

$$P(x)(x + 3a) = 2x^2 + 5ax - 3a^2$$

따라서, 다항식 $P(x)$ 는 $2x^2 + 5ax - 3a^2$ 을 $x + 3a$ 로 나눈 몫이므로

$$P(x) = 2x - a$$

$$\begin{aligned}\therefore (x + a)P(x) &= (x + a)(2x - a) \\ &= 2x^2 + ax - a^2\end{aligned}$$

12. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a , b 라 할 때, $a-b$ 의 값은?

① $4^3 - 5^3$

② $3^3 - 3^4$

③ 0

④ 1

⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$ 을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3 = A$ 라 놓으면

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$$

$$= (A+x^4)^3$$

$$= A^3 + 3A^2x^4 + 3Ax^8 + x^{12}$$

$$= A^3 + (3A^2 + 3Ax^4 + x^8)x^4$$

이 때 $(3A^2 + 3Ax^4 + x^8)x^4$ 은 x^3 항을 포함하고 있지 않으므로 두 다항식의 x^3 의 계수는 같다.

$$\therefore a-b=0$$

13. 다음 중 $2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$ 의 인수인 것은?

- ① $2x + y - 2$ ② $2x - y + 2$ ③ $x - y + 1$
④ $x + y - 1$ ⑤ $x - 2y - 1$

해설

x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $2x^2 - (y + 4)x - y^2 + y + 2$
 $= 2x^2 - (y + 4)x - (y + 1)(y - 2)$
 $= (2x + (y - 2))(x - (y + 1))$
 $= (2x + y - 2)(x - y - 1)$

14. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① 직각삼각형 ② 이등변삼각형
③ 정삼각형 ④ 직각이등변삼각형
⑤ 둔각삼각형

해설

$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 에서
 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$
 $\frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) = 0$
 $\frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) = 0$
 $\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0$
 a, b, c 는 실수이므로
 $a - b = 0, b - c = 0, c - a = 0$
 $\therefore a = b = c$
따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

- 15.** 자연수 $N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$ 의 양의 약수의 개수를 구하여라. (인수분해공식을 이용하여 푸시오.)

▶ 답: 개

▶ 정답 : 49 개

해설

$$\begin{aligned} a^3 + 3a^2 + 3a + 1 &= (a+1)^3 \\ \therefore N &= 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1 \\ &= (35+1)^3 = 36^3 = 2^6 \times 3^6 \\ \therefore \text{약수의 개수} &= (6+1) \times (6+1) = 49 \end{aligned}$$

16. $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=5$, $a^3+b^3+c^3=2$ 일 때, abc 의 값은?

- ① $-\frac{5}{3}$ ② 0 ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 \\ &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{ 이므로} \\ & 5 = 1 - 2(ab+bc+ca) \\ & \therefore ab+bc+ca = -2 \\ & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \text{ 이므로} \\ & 2 - 3abc = 1 \cdot (5+2) \\ & \therefore abc = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

17. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형

② 이등변삼각형

③ 정삼각형

④ 직각이등변삼각형

⑤ 둔각삼각형

해설

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \text{ 에서 } a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) = 0$$

$$\frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) = 0$$

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0 \text{ 이고,}$$

a, b, c 는 실수이므로, $a - b = 0, b - c = 0, c - a = 0$

$$\therefore a = b = c$$

따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

18. 실수 x 가 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 을 만족할 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

- ① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

준식의 양변을 x 로 나누면

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 3^3 - 3 \times 3 = 18 \end{aligned}$$

19. $a + b = 4$, $a^2 + b^2 = 10$ 일 때, $a^5 + b^5$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 244

해설

$$a + b = 4, a^2 + b^2 = 10$$

$$ab = \frac{1}{2}((a + b)^2 - (a^2 + b^2)) = 3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 28$$

$$\begin{aligned}\therefore a^5 + b^5 &= (a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - a^2b^2(a + b) \\ &= 28 \times 10 - 9 \times 4 \\ &= 244\end{aligned}$$

20. $x^{113} + 1$ 을 $x^3 + x$ 로 나누었을 때, 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라고 하자. 이때, $R(2006)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2007

해설

$$\begin{aligned} x^{113} + 1 &= (x^3 + x)Q(x) + R(x) \\ &= x(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

항등식이므로 $x = 0, x^2 = -1$ 을 각각 대입하면,

$$1 = c, \quad x + 1 = -a + bx + c$$

$$\therefore a = 0, \quad b = 1$$

$$\therefore R(x) = x + 1$$

$$\text{따라서 } R(2006) = 2007$$