1. x 에 대한 다항식 $3x^3y+5y-xz+9xy-4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ 내림차순으로 정리하면
$3yx^3+(9y-z)x+5y-4$ 이다.
㉡ 오름차순으로 정리하면
$5y-4+(9y-z)x+3yx^3$ 이다.
㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3 차식이다.
㉣ x^3 의 계수는 3이다.
㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢
② ㉠, ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉡
④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설
㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.
㉤ 상수항은 $5y-4$ 이다.

2. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $A \ominus B$와 $A \otimes B$을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$A \ominus B = A - 3B$, $A \otimes B = (A+B)B$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3$, $Q = x^3 + x^2y + xy^2$ 이라 할 때, $(P \ominus Q) \otimes Q$를 x, y에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$　② $x^4y^2 - xy^5$　③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$　⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$를 변형하면

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P - 3Q) \otimes Q \\ &= (P - 3Q + Q)Q \\ &= (P - 2Q)Q \quad \cdots ①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P - 2Q \\ &= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

3. 다항식 x^3-3x-3을 다항식 x^2-2x-1로 나누었을 때의 몫이 $ax+b$이고, 나머지가 $cx+d$이었다. 이 때, $a+b+c+d$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x^3-3x-3=(x^2-2x-1)(ax+b)+cx+d$
에서 계수를 비교하면
$a=1,\ -b+d=-3,\ -a-2b+c=-3,\ b-2a=0$
에서 $a=1,\ b=2,\ d=-1,\ c=2$
$\therefore\ a+b+c+d=1+2+(-1)+2=4$

4. 다음 곱셈공식을 전개한 것 중 바른 것은?

① $(x-y-1)^2 = x^2+y^2+1-2xy-2x-2y$

② $(a+b)^2(a-b)^2 = a^4-2a^2b^2+b^4$

③ $(-x+3)^3 = x^3-9x^2+27x-27$

④ $(a-b)(a^2+ab-b^2) = a^3-b^3$

⑤ $(p-1)(p^2+1)(p^4+1) = p^{16}-1$

해설

① $(x-y-1)^2 = x^2+y^2+1-2xy-2x+2y$
③ $(-x+3)^3 = -x^3+9x^2-27x+27$
④ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$
⑤ $(p-1)(p+1)(p^2+1)(p^4+1) = p^8-1$

5. $(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$를 전개했을 때, x^2과 x^3의 계수를 모두 0이 되게 하는 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$
$=x^5+bx^4+(a+2)x^3+(ab+2)x^2+(2a+2b)x+4$
(x^2의 계수)=(x^3의 계수)=0이므로
$ab+2=0,\ a+2=0$
따라서 $a=-2,\ b=1$
$\therefore a+b=-1$

6. $(2x^3-3x^2+3x+4)(3x^4+2x^3-2x^2-7x+8)$ 을 전개한 식에서 x^3 의 계수는?

① 31　② 33　③ 35　④ 37　⑤ 39

해설

$2x^3 \times 8 - 3x^2 \times (-7x) + 3x \times (-2x^2) + 4 \times 2x^3 = 39x^3$

7. 다항식 $x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$ 의 차수는?

① 2차 ② 3차 ③ 6차 ④ 7차 ⑤ 8차

해설

$x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$

$=x^2(x^2+1)(x^2+2x+3)$

$\therefore$ 6차 다항식

8. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + a$를 $x^2 + x + 1$로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a의 값을 구하면?

① -3　② 3　③ -6　④ 6　⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.
$\therefore a - 3 = 0, a = 3$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$이 되는 x값을 대입한다.
$x^2 + x + 1 = 0$에서 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$, $x^3 - 1 = 0$
$\therefore x^3 = 1$
준 식의 좌변에 $x^3 = 1$, $x^2 = -x - 1$을 대입하면
$2x - 1 + 2(-x - 1) + a = 0$, $a - 3 = 0$
$\therefore\ a = 3$

9. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a, 상수항을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 8 ② 15 ③ 24 ④ 36 ⑤ 47

해설

$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$
$= (x^2+x-2)(x^2+x-12)(x^2+x=X(\text{치환}))$
$= (X-2)(X-12)$
$= X^2-14X+24$
$= (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$
$= x^4+2x^3-13x^2-14x+24$
$\therefore\ a=1+2-13-14+24=0,\ b=24$
$\therefore\ a+b=0+24=24$

해설

㉠ 각 항 계수의 총합 구하기
$x=1$ 대입, $a=0$
㉡ 상수항 구하기
$x=0$ 대입, $b=24$

10. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$ 의 전개식으로 옳은 것은?

① a^3+b^3　② a^6+b^6　③ a^6-b^6
④ a^9+b^9　⑤ a^9-b^9

해설
(준 식)$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6$

11. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겉넓이는 52이고, 모서리의 길이의 합은 36이다. 이 상자의 대각선의 길이는?

① 5　　② $\sqrt{29}$　　③ $\sqrt{33}$　　④ 6　　⑤ $\sqrt{42}$

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c라 하면

$2(ab+bc+ca)=52$

$4(a+b+c)=36 \ \rightarrow \ a+b+c=9$

(직육면체 대각선의 길이)

$= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$= \sqrt{(a+b+c+)^2-2(ab+bc+ca)}$

$= \sqrt{81-52} = \sqrt{29}$

12. $x^2 + x - 1 = 0$ 일 때, $x^5 - 5x$ 의 값을 구하면?

① 2　② 1　③ 0　④ -1　⑤ -3

해설

$x^5 - 5x$ 를 $x^2 + x - 1$ 로 나누면

즉, $x^5 - 5x = (x^2 + x - 1) \times$ 몫-3

$x^2 + x - 1 = 0$

$\therefore\ x^5 - 5x = -3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.

$x^2 = -x + 1$

$$\begin{aligned} x^5 - 5x &= (x^2)^2 \times x - 5x \\ &= x(-x+1)^2 - 5x \\ &= x^3 - 2x^2 - 4x \\ &= x(-x+1) - 2(-x+1) - 4x \\ &= -x^2 - x - 2 \\ &= -(x^2 + x) - 2 \\ &= -1 - 2 = -3 \end{aligned}$$

13. 세 실수 $a,\ b,\ c$가 다음 세 조건을 만족한다.

$$a+b+c=1,\ ab+bc+ca=1,\ abc=1$$

이 때, $(a+b)(b+c)(c+a)$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$a+b+c=1$에서

$a+b=1-c,\ b+c=1-a,\ c+a=1-b$

$(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(1-c)(1-a)(1-b)$

$=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$

$=1-1+1-1=0$

14. $(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8)$을 간단히 하면?

① 4^8+3^8 ② $4^{15}-3^{15}$ ③ $4^{15}+3^{15}$
④ $4^{16}-3^{16}$ ⑤ $4^{16}+3^{16}$

해설

$(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8)$
$=(4-3)(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8)$
$=(4^2-3^2)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8)$
$=(4^4-3^4)(4^4+3^4)(4^8+3^8)$
$=(4^8-3^8)(4^8+3^8)$
$=4^{16}-3^{16}$

15. $P=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$ ② $2^{32}+1$ ③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$ ⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$을 곱해도 값은 변하지 않으므로

$$
\begin{aligned}
P &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\
&= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{1}6+1)\\
&= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\
&= \quad \vdots\\
&= (2^{16}-1)(2^{16}+1)\\
&= 2^{32}-1
\end{aligned}
$$

16. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a_1+a_2+\cdots+a_{10}$의 값은?

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)} = \frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{x-2}+\cdots+\frac{a_{10}}{x-10}$$

① 0 ② −1 ③ 1 ④ −10 ⑤ 10

해설

우변을 통분하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면,

(우변)$=\dfrac{(a_1+a_2+\cdots+a_{10})x^9+\cdots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$

양변의 계수를 비교하면

$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=0$

17. $99 \times 101 \times (100^2 + 100 + 1) \times (100^2 - 100 + 1)$ 을 계산하면?

① $100^6 - 1$ ② $100^6 + 1$ ③ $100^9 - 1$
④ $100^9 + 1$ ⑤ 1

해설

$100 = a$로 치환 하면

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= (a-1)(a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)\\
&= \left(a^3-1\right)\left(a^3+1\right)\\
&= a^6-1\\
&= 100^6-1
\end{aligned}
$$

18. $\dfrac{2005^3+1}{2005\times 2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

$2005 = x$ 로 놓으면

$$(\text{준 식}) = \frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1}$$
$$= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$= x+1$$
$$= 2006$$

19. 실수 x가 $x^2 - 3x + 1 = 0$을 만족할 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$의 값을 구하면?

① 18　　② 19　　③ 20　　④ 21　　⑤ 22

해설

준식의 양변을 x로 나누면

$x + \frac{1}{x} = 3$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 3^3 - 3 \times 3 = 18 \end{aligned}$$

20. $a+b+c=1$, $ab+bc+ca=1$, $abc=1$일 때, $a^3+b^3+c^3$의 값은?

① 3 ② -3 ③ 1 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$1=a^2+b^2+c^2+2$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=-1$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$a^3+b^3+c^3-3=1\cdot(-1-1)=-2$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=1$

21. $x+\frac{1}{x}=1$ 일 때, $x^{101}+\frac{1}{x^{101}}$ 의 값은?

① 1　　② -1　　③ -2　　④ 2　　⑤ 101

해설

$x+\frac{1}{x}=1$에서 $x^2+1=x$

$\therefore\ x^2-x+1=0,\ x^3=-1$

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= (x^3)^{33}\cdot x^2+\frac{1}{(x^3)^{33}\cdot x^2}\\ &= -x^2+\frac{-1}{x^2}=-\frac{x^4+1}{x^2}=-\frac{-x+1}{x^2}\\ &= \frac{x-1}{x^2}=1\end{aligned}$$

22. A를 B로 나눈 몫을 Q, 나머지를 R라 하고, Q를 B'으로 나눈 몫은 Q', 나머지는 R'이라 한다. A를 BB'으로 나눈 나머지는? (단, 모든 문자는 자연수이다.)

① $R + R'B$　　② $R' + RB$　　③ RR'

④ R　　⑤ R'

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면

$A = BQ + R$ ……㉠

$Q = B'Q' + R'$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$A = B(B'Q' + R') + R$

$= (BB')Q' + (R + R'B)$

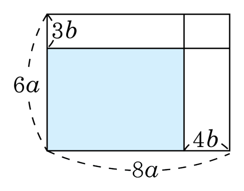
$R + R'B$가 A를 BB'로 나눈 나머지가 되기 위해서는 $R + R'B < BB'$이어야 한다.

그런데 $R \le B - 1$, $R' \le B' - 1$이므로

$$R + R'B \le (B - 1) + (B' - 1)B = BB' - 1 < BB'$$

따라서 A를 BB'으로 나눈 나머지는 $R + R'B$이다.

23. 다음 그림에서 색칠한 직사각형의 넓이는?



① $6a^2 - 7ab + 2b^2$ ② $36a^2 - 42ab + 12b^2$

③ $48a^2 - 48ab + 12b^2$ ④ $12a^2 - 12ab + 3b^2$

⑤ $48a^2 + 48ab + 12b^2$

해설

$(6a - 3b)(8a - 4b) = 48a^2 - 48ab + 12b^2$

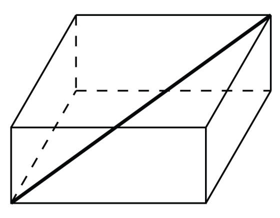
24. 0이 아닌 세수 x, y, z에 대하여 x, y, z중 적어도 하나는 6이고, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$일 때, $2(x+y+z)$의 값을 구하면?

① 6　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

해설

x, y, z중 적어도 하나가 6이므로,
$(x-6)(y-6)(z-6)=0$
$\therefore\ xyz-6(xy+yz+zx)+36(x+y+z)-216=0 \cdots$①
또, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$이므로
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}, \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{6}$
$\therefore\ 6(xy+yz+zx)=xyz \cdots$②
①, ②에서
$36(x+y+z)=216$
$\therefore\ 2(x+y+z)=12$

25. 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 3이고 겉넓이가 16, 부피가 6인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a, b, c라 할 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?



① 12　② 18　③ 21　④ 23　⑤ 30

해설

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3,\ abc=6,\ 2(ab+bc+ca)=16$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$(a+b+c)^2=25,\ a+b+c=5(\because a,b,c$는양수$)$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\ \cdots$①

①에 각각 대입하면

$a^3+b^3+c^3-18=5\times(9-8)$

$a^3+b^3+c^3=23$

26. $a-b=1$ 이고, $a^2+b^2=-1$ 일 때, $a^{14}+b^{20}$ 의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$b=a-1$ 을 $a^2+b^2=-1$ 에 대입하면
$a^2-a+1=0$ 에서 $a^3=-1$
$a=b+1$ 을 $a^2+b^2=-1$ 에 대입하면
$b^2+b+1=0$ 에서 $b^3=1$

$$\begin{aligned} a^{14}+b^{20} &= (a^3)^4\times a^2+(b^3)^6\times b^2 \\ &= a^2+b^2=-1 \end{aligned}$$