1. 16의 네제곱근 중 실수인 것을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-2, 2$

해설

16의 네제곱근은
 $x^4 = 16$ 를 만족하는 x 의 값이므로
 $x^4 - 16 = 0$ 에서
 $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$
 $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$
 $\therefore x = -2, 2, 2i, -2i$
따라서 16의 네제곱근 중 실수인 것은
 $-2, 2$

2. -64 의 세제곱근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-4, 2 + 2\sqrt{3}i, 2 - 2\sqrt{3}i$

해설

-64 의 세제곱근은 $x^3 = -64$ 를 만족하는 x 의 값이므로
 $x^3 + 64 = 0$ 에서
 $(x + 4)(x^2 - 4x + 16) = 0$
 $\therefore x + 4 = 0$ 또는 $x^2 - 4x + 16 = 0$
 $\therefore x = -4$ 또는 $x = 2 + 2\sqrt{3}i$ 또는 $x = 2 - 2\sqrt{3}i$
따라서 -64 의 세제곱근은
 $-4, 2 + 2\sqrt{3}i, 2 - 2\sqrt{3}i$

3. $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ 를 간단히 하면?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

4. $(\sqrt[5]{2})^4 \times \sqrt[5]{64}$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ $\sqrt[5]{128}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt[5]{512}$

해설

$$2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{6}{5}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2 = 4$$

5. 다음 중 옳은 것은?

① $\sqrt[3]{2} \sqrt{3} = \sqrt[6]{6}$

② $\sqrt[4]{-16} = -2$

③ $\frac{\sqrt[3]{200}}{\sqrt[3]{25}} = 2$

④ $\sqrt[3]{\sqrt{243}} = 3$

⑤ $(\sqrt[3]{1000})^2 = 10$

해설

① $\sqrt[3]{2} \sqrt{3} = \sqrt[3]{2^2} \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{108}$

② $\sqrt[4]{-16} = x$ 라 하면 $x^4 = -16$ 인 실수 x 는 존재하지 않는다.

③ $\frac{\sqrt[3]{200}}{\sqrt[3]{25}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

④ $\sqrt[3]{\sqrt{243}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^5}} = \sqrt[6]{3^5}$

⑤ $(\sqrt[3]{1000})^2 = \sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3}$

6. 식 $\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{48} \times \sqrt[3]{8}$ 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{48} \times \sqrt[3]{8} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 4\sqrt{3} \times 2 = 8$$

7. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $(2\sqrt{2})\sqrt{2} = 4$

㉡ $(5\sqrt{2}) \times (5\sqrt{2}) = 25\sqrt{2}$

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3\sqrt{2}$

① ㉢

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $(2\sqrt{2})\sqrt{2} = 2^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 2^2 = 4$ (참)

㉡ $(5\sqrt{2}) \times (5\sqrt{2}) = (5 \times 5)\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$ (참)

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = (3^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\frac{2}{\sqrt{2}}} = 3\sqrt{2}$ (참)

8. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① -3 은 -27 의 세제곱근이다.
- ② 81 의 네제곱근은 $3, -3, 3i, -3i$ 이다.
- ③ $-\sqrt[3]{81} = -3$
- ④ $\sqrt{-16} = -2$
- ⑤ $\sqrt[3]{-64} = -4$

해설

④ $(-2)^4 = 16$ 이므로 $\sqrt{-16} = \pm 2$

9. 16의 네제곱근 중 실수인 것의 곱을 P , 27의 세제곱근 중 허수인 것의 합을 Q 라 할 때, $P \times Q$ 의 값은?

- ① -36 ② -12 ③ 4 ④ 12 ⑤ 36

해설

$x^4 = 16, x^3 = -27$ 을 만족하는 x 를 구한다.

16의 네제곱근 중 실수인 것은

$$\sqrt[4]{16} = 2, -\sqrt[4]{16} = -2$$

$$\therefore P = -4$$

-27의 세제곱근을 X 라 하면

$$x^3 = -27, (x+3) + (x^2 - 3x + 9) = 0$$

이때, -27의 세제곱근 중 허수인 것의 합은 방정식 $x^2 - 3x + 9 = 0$

의 두근의 합과 같다.

$$\therefore Q = 3$$

$$\therefore P \times Q = -12$$

10. 거듭제곱에 대한 설명 중 옳은 것은?

- ① $\sqrt[4]{81} = \pm 3$
- ② $\sqrt[3]{-64} = -8$
- ③ 16의 네제곱근은 ± 2 이다.
- ④ $\sqrt{(-3)^2}$ 의 제곱근은 3이다.
- ⑤ -1은 -1의 세제곱근 중 하나이다.

해설

- ① $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{9^2} = 3$ ∴ 거짓
- ② $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$ ∴ 거짓
- ③ 16의 네제곱근은 $\pm 2, \pm 2i$ 이다. ∴ 거짓
- ④ $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ 의 제곱근은 $\pm\sqrt{3}$ 이다. ∴ 거짓
- ⑤ $(-1)^3 = -1$ 이므로 -1은 -1의 세제곱근 중 하나이다. ∴ 참

11. 다음 식의 값은?

$$2^2 \times 2^{-3}$$

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$$2^2 \times 2^{-3} = 2^{2+(-3)} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

12. $\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{-\frac{3}{2}}$ 을 간단히 하면?

- ① -16 ② -4 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

해설

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3} \times (-\frac{3}{2})} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 2^{-2 \times (-2)} = 2^4 = 16$$

13. $\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{9}{4}}$ 의 값은?

- ① $\frac{8}{27}$ ② $\frac{16}{61}$ ③ $\frac{81}{16}$ ④ $\frac{27}{8}$ ⑤ $\frac{64}{81}$

해설

$$\begin{aligned}\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{9}{4}} &= \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{2}{3} \times \frac{9}{4}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2 \times (-\frac{3}{2})} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \\ &= \left(\frac{8}{27}\right)^{-1} = \frac{27}{8}\end{aligned}$$

14. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $a^2 \div a^{-3} \times a^4 = a^9$

② $(a^{-3})^2 \times (a^2)^{-4} = a^{-14}$

③ $\frac{a^2 \times a^{-3}}{a^{-2} \times a^4} = a^{-2}$

④ $\frac{(a^3)^{-2}}{a^5 \times a^2} = a^{-16}$

⑤ $\frac{a^3 \times a^4}{a^2 \times a^{-5}} = a^9$

해설

③ $\frac{a^2 \times a^{-3}}{a^{-2} \times a^4} = \frac{a^{-1}}{a^2} = a^{-1-2} = a^{-3}$

15. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ 을 간단히 하면 $a^{\frac{m}{n}}$ 이다. 이때, $m-n$ 의 값을 구하여라.
(단, m, n 은 서로소인 자연수)

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} &= \sqrt{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}} \\ &= \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{2}}} \\ &= (a^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{4}} \\ n &= 4, m = 7 \\ 7 - 4 &= 3\end{aligned}$$

16. $\left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left\{\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{2}{3}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{5}$

② 1

③ $\sqrt{5}$

④ 5

⑤ $5\sqrt{5}$

해설

$$\begin{aligned}\left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left\{\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{2}{3}} &= \left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= (25)^{\frac{1}{2}} = 5\end{aligned}$$

17. $\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}}$ 을 2^k 꼴로 나타낼 때 k 는?

- ① $\frac{11}{12}$ ② $\frac{11}{24}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{23}{24}$ ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}} \\ &= \{2 \times (4 \times 8^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \{2 \times (2^2 \times 2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \{2 \times (2^{\frac{11}{4}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}} \\ &= (2 \times 2^{\frac{11}{12}})^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{23}{12}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{23}{24}} \\ \therefore k &= \frac{23}{24} \end{aligned}$$

18. $\frac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}}$ 의 값은?

① $1-\sqrt{2}$

② $-1-\sqrt{2}$

③ $(1+\sqrt{2})i$

④ $-(1+\sqrt{2})i$

⑤ $(1-\sqrt{2})i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{1}{i} \\ &= (\sqrt{2}+1) \times (-i) \\ &= -(1+\sqrt{2})i\end{aligned}$$

19. 복소수 $z = (1+i)x + 1 - 2i$ 에 대하여 z^2 이 음의 실수일 때, 실수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x = -1$

해설

$$z = (1+i)x + 1 - 2i = (x+1) + (x-2)i$$

z^2 의 음의실수 $\Leftrightarrow z$ 가 순허수

$$\therefore x+1=0, \quad x=-1$$

20. 이차함수 $y = x^2 - kx + 3k + 2$ 의 그래프에 의하여 잘려지는 x 축의 길이가 3일 때, 모든 실수 k 의 값의 합은?

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

이차함수 $y = x^2 - kx + 3k + 2$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 좌표를 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ 이라 하면
 α, β 는 이차방정식 $x^2 - kx + 3k + 2 = 0$ 의 두 근이다.
근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = k$, $\alpha\beta = 3k + 2$
잘려지는 x 축의 길이가 3이므로 $|\alpha - \beta| = 3$
이 때, $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로 $9 = k^2 - 4(3k + 2)$
 $k^2 - 12k - 17 = 0$
따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k 의 값의 합은 12이다.

21. $\frac{2x+3a}{4x+2}$ 가 x 에 관계없이 일정한 값을 가질 때, a 의 값을 구하면?

(단, $x \neq -\frac{1}{2}$)

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$\frac{2x+3a}{4x+2} = k \text{ (일정)라 놓으면}$$

$$2x+3a = k(4x+2) \text{ 에서 } (2-4k)x + (3a-2k) = 0$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$2-4k=0, 3a-2k=0$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } a = \frac{1}{3}$$

22. 사차방정식 $2x^4 + 7x^2 - 4 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\frac{\beta}{\alpha}$ 의 값은?

- ① $1+i$ ② i ③ 0 ④ -1 ⑤ 24

해설

$$2x^4 + 7x^2 - 4 = 0 \text{에서 } x^2 = t \text{라 하면}$$

$$2t^2 + 7t - 4 = 0, (2t - 1)(t + 4) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = -4$$

$$\therefore x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ 또는 } x = \pm 2i$$

이 때, α, β 는 허근이므로

$$\alpha = 2i, \beta = -2i \text{ 또는 } \alpha = -2i, \beta = 2i$$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha} = -1$$

23. $\sqrt[3]{27} \div \sqrt[3]{2} \times \sqrt{2^5}$ 을 간단히 하면?

- ① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ $16\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} & 2^{\frac{7}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{5}{2}} \\ & = 2^{\frac{7}{3} - \frac{1}{3} + \frac{5}{2}} = 2^{\frac{9}{2}} = 16\sqrt{2} \end{aligned}$$

24. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3}$ 을 간단히 하면?

- ① $\sqrt[6]{a}$ ② $\sqrt[6]{b}$ ③ $\sqrt[6]{ab}$ ④ $\sqrt[6]{a^2b}$ ⑤ $\sqrt[6]{ab^2}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3} \\ &= (a^2b^3)^{\frac{1}{6}} \times (ab)^{\frac{1}{2}} \div (a^2b^3)^{\frac{1}{3}} \\ &= a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{2}{3}}b = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1} \\ &= a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a} \end{aligned}$$

25. 다음 중 세 수 $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[5]{30}$ 을 작은 수부터 차례로 나열한 것은?

- ① $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[5]{30}$ ② $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[5]{30}$
③ $\sqrt[5]{30}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$ ④ $\sqrt[5]{30}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{6}$
⑤ $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[5]{30}$, $\sqrt[3]{6}$

해설

거듭제곱의 성질을 이용하여 $\sqrt[3]{N}$ 의 꼴로 나타내면

$$\sqrt[3]{6} = \sqrt[12]{6^4}$$

$$\sqrt[4]{10} = \sqrt[12]{10^3}$$

$$\sqrt[5]{30} = \sqrt[12]{30^2}$$

그런데

$$\frac{6^4}{10^3} = \frac{(2 \times 3)^4}{(2 \times 5)^3} = \frac{2 \times 3^4}{5^3} > 1,$$

$$\frac{10^3}{30^2} = \frac{10}{9} > 1 \text{ 이므로}$$

$$6^4 > 10^3 > 30^2$$

따라서 작은 수부터 나열하면

$$\sqrt[5]{30}, \sqrt[4]{10}, \sqrt[3]{6}$$