1. 방정식 $(a^2-3)x-1 = a(2x+1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(a^2-2a-3)x = a+1$

$(a-3)(a+1)x = a+1$

$\therefore a = 3$ 이면 해가 없다.

2. 방정식 $|x-1|=2$의 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -1

해설

ⅰ) $x \geq 1$일 때

$|x-1| = x-1$이므로, $x-1=2$

$\therefore x=3$

ⅱ) $x<1$일 때

$|x-1| = -x+1$이므로, $-x+1=2$

$\therefore x=-1$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3$ 또는 $x=-1$

3. x에 대한 이차방정식 $x^2 - 4x + 6 = 0$의 근을 구하면 $x = a \pm \sqrt{b}i$이다. $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 4

해설

$x^2 - 4x + 6 = 0$

근의 공식을 이용하면 $x = 2 \pm \sqrt{4 - 6} = 2 \pm \sqrt{2}i$

$\therefore a = b = 2, \quad a + b = 4$

4. x에 대한 방정식 $ix^2+(1+i)x+1=0$의 해를 구하여라. (단, $x \neq i$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

양변에 $-i$를 곱하면

$(-i)\cdot ix^2-i(1+i)x-i=0$

$x^2+(1-i)x-i=0$

$(x-i)(x+1)=0$

$x \neq i$이므로 $x=-1$

5. 0 이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 모두 고른 것은?

보 기

㉠ $x^2 + ax + b = 0$	㉡ $x^2 + bx + a = 0$
㉢ $ax^2 + x + b = 0$	㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉡, ㉢ ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣

해설

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

㉠ $x^2 + ax + b = 0,\ D = a^2 - 4b$

$b \le \frac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2,\ a^2 \ge 4b^2$ 일 때만 실근 존재

6. 이차방정식 $x^2 + (k-4)x + k - 1 = 0$ 이 중근을 가지도록 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
$D = 0$ 일 때 중근을 가지므로
$D = (k-4)^2 - 4(k-1) = k^2 - 12k + 20 = 0$ 에서
$(k-2)(k-10) = 0$
따라서, $k = 2,\ k = 10$ 이므로 k 의 값은 12 이다.

7. x에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2+2kx+k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k의 최솟값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

(i) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $k-1 \neq 0$이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} > 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4} = k^2 - (k-1)^2 > 0,\ 2k-1>0$

$\therefore k > \frac{1}{2}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

8. 0이 아닌 두 실수 $a,\ b$가 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$를 만족할 때, 다음 [보기]의 x에 대한 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $ax^2-bx+1=0$

㉡ $x^2-ax-b=0$

㉢ $x^2+2(a+b)x+(a^2+b^2)=0$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0,\ b<0$
㉠ $ax^2-bx+1=0$에서
$D=b^2-4a>0$
㉡ $x^2-ax-b=0$에서
$D=a^2+4b$는 음수, 양수를 판별할 수 없다.
㉢ $x^2+2(a+b)x+(a^2+b^2)=0$에서
$\frac{D}{4}=(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab>0$

9. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + b - 3 = 0$이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a = 1, b = 2$　② $a = 0, b = 3$　③ $a = -1, b = 2$
④ $a = 0, b = 2$　⑤ $a = -1, b = 3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.
$D' = (k-a)^2 - (k^2 + b - 3) = 0$
$\Rightarrow \quad -2ak + a^2 - b + 3 = 0$
모든 k 에 대해 성립하려면
$-2a = 0,\ a^2 - b + 3 = 0$
$\therefore \quad a = 0, b = 3$

10. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2+2cx+a-b$는 x의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형
④ a가 빗변인 직각삼각형
⑤ c가 빗변인 직각삼각형

해설

$a,\ b,\ c$가 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a>0,\ b>0,\ c>0$
따라서, $a+b>0$이므로 준식은 이차식이다.
준식이 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$
$$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)=0$$
정리하면, $c^2-a^2+b^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, a가 빗변인 직각삼각형