

1. 다음 중 다항식 $x^4 - 8x^2 - 9$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x - 3$

② $x + 3$

③ $x^2 + 1$

④ $x^2 + 9$

⑤ $x^3 + 3x^2 + x + 3$

해설

준 식을 인수분해 하면

$$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 + 1)(x^2 - 9)$$

$$= (x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$$

$$\textcircled{5} \ x^2(x + 3) + x + 3 = (x^2 + 1)(x + 3)$$

2. x 에 대한 이차방정식 $(k^2 - 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$ 이 허근을 가질 때, $k > m$ 이다. m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2 - 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$ 이

허근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = (k - 1)^2 - (k^2 - 1) < 0$$

$$(k^2 - 2k + 1) - (k^2 - 1) < 0$$

$$-2k + 2 < 0, k > 1$$

$$\therefore m = 1$$

3. x 의 범위가 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때, 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + 1$ 의 최댓값을 구하면?

① -2

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$y = -2(x - 1)^2 + 3$$

$\therefore x = 1$ 일 때, 최댓값 3

4. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 의 근 중에서 최대의 근은?

① -2

② -1

③ 0

④ 6

⑤ 2

해설

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 에서
 $x = 1, x = -1$ 을 대입하면 성립하므로
 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$
 $= (x-1)(x+1)(x^2+x-6)$
 $= (x-1)(x+1)(x+3)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -3, -1, 1, 2$
따라서 최대의 근은 2

5. 연립방정식 $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z+3}{5} \\ x+2y+3z=7 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=3$

▷ 정답 : $y=-1$

▷ 정답 : $z=2$

해설

$\frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3}$ 에서
 $3x+2y=7 \dots\dots\textcircled{A}$
 $\frac{x-1}{2} = \frac{z+3}{5}$ 에서
 $5x-2z=11 \dots\dots\textcircled{B}$
 $x+2y+3z=7 \dots\dots\textcircled{C}$
 $\textcircled{A}-\textcircled{C}$ 을 하면 $2x-3z=0 \dots\dots\textcircled{D}$
 $\textcircled{B}\times 3-\textcircled{D}\times 2$ 를 하면 $11x=33$
 $\therefore x=3$ 이것을 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에 대입하면
 $y=-1, z=2$

6. $ab < 0$, $ac > 0$ 일 때, 직선 $ax + by + c = 0$ 이 지나지 않는 사분면은?

- ① 제 1, 2 사분면 ② 제 1, 3 사분면 ③ 제 2, 4 사분면
④ 제 2 사분면 ⑤ 제 4 사분면

해설

$ab < 0$, $ac > 0$ 이므로 $b \neq 0$ 이다.

따라서, 주어진 직선의 방정식을 b 로 나

누어 정리하면

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$(\text{기울기}) = -\frac{a}{b} > 0$$

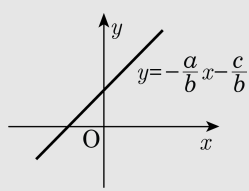
한편, $ab < 0$, $ac > 0$ 이므로

$$ab \cdot ac = a^2bc < 0$$

따라서 $bc < 0$

$$(y \text{ 절편}) = -\frac{c}{b} > 0$$

따라서, 주어진 직선은 제 1, 2, 3 사분면을 지나고 제 4 사분면은 지나지 않는다.



7. 다음의 x, y 에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 않은 것은?

- ① $x^2 + y^2 + x + 2y + 1 = 0$ ② $x^2 + y^2 + x + 2y + 2 = 0$
③ $x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$ ④ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$
⑤ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$

해설

- ① $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$
② $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = -\frac{3}{4}$
③ $(x + 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
④ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$
⑤ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$

8. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 에 대하여 $A \cap B^c$ 은?

① $\{1\}$ ② $\{2\}$ ③ $\{4\}$ ④ $\{1, 2\}$ ⑤ $\{2, 4\}$

해설

$A \cap B^c = A - B = \{2, 4\}$ 이다.

9. 실수전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 f 는 항등함수이고 $g(x) = -3(x$ 는 실수) 일 때, $f(2) + g(4)$ 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

f 는 항등함수이므로 $f(x) = x$

$\therefore f(2) = 2$

모든 실수 x 에 대하여

$g(x) = -3$ 이므로 g 는 상수함수이다.

$\therefore g(4) = -3$

$\therefore f(2) + g(4) = 2 + (-3) = -1$ 이다.

10. 함수 $f(x) = ax + 3$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f^{-1} = f$ 의 양변에 함수 f 를 합성하면

$$f^{-1} \circ f = f \circ f$$

이때, $f^{-1} \circ f = I$ (I 는 항등함수) 이므로 $f \circ f = I$

$$\text{즉 } (f \circ f)(x) = x$$

$$\begin{aligned} \therefore (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(ax + 3) \\ &= a(ax + 3) + 3 = a^2x + 3a + 3 = x \end{aligned}$$

따라서 $a^2 = 1$, $3a + 3 = 0$ 이므로 $a = -1$

11. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x + 1$ 로 나누면 나머지가 5이고, $x - 2$ 로 나누면 나누어 떨어진다고 한다. 이 때, $m + n$ 의 값은?

- ① $-\frac{19}{3}$ ② $-\frac{25}{6}$ ③ $-\frac{29}{6}$ ④ $-\frac{14}{3}$ ⑤ $-\frac{7}{2}$

해설

$$f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 1$$

$$f(x) = (x + 1)Q_1(x) + 5 \text{ 으로 놓으면 } f(-1) = 5$$

$$f(x) = (x - 2)Q'(x) \text{ 으로 놓으면 } f(2) = 0$$

$$\text{따라서, } f(-1) = -1 + m - n + 1 = 5$$

$$f(2) = 8 + 4m + 2n + 1 = 0$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } m = \frac{1}{6}, \quad n = -\frac{29}{6}$$

$$\therefore m + n = -\frac{28}{6} = -\frac{14}{3}$$

12. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(0)$ 의 값은?

- ① $2f(1) - f(2)$ ② $2\{f(1) + f(2)\}$
③ $2(1) + f(2)$ ④ $4\{f(1) + f(2)\}$
⑤ $4\{f(1) - f(2)\}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b \\ &= (x - 1)(x - 2)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

$$R(x) = ax + b, \quad R(0) = b$$

$$f(1) = a + b, \quad f(2) = 2a + b$$

$$2f(1) - f(2) = b$$

13. 어떤 정육면체의 밑변의 가로와 세로의 길이를 1 cm 줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm 씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면
조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3$,
 $x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3$,
 $\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$ 에서
 $3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$ 을 풀면 $x = 2$ (cm)

14. 직선 $x + ay + 1 = 0$ 이 직선 $2x + by + 1 = 0$ 에 수직이고 직선 $x - (b - 1)y - 1 = 0$ 과 평행할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

두 직선 $x + ay + 1 = 0$, $2x + by + 1 = 0$ 이 서로 수직이므로

$$1 \cdot 2 + a \cdot b = 0 \quad \therefore ab = -2 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

두 직선 $x + ay + 1 = 0$, $x - (b - 1)y - 1 = 0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{1}{1} = \frac{a}{1-b} \neq \frac{1}{-1} \quad \therefore a + b = 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{ 에서 } a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$\therefore 1 - 2 \cdot (-2) = 5$$

15. 세 직선 $x + y + 2 = 0$, $x - y - 4 = 0$, $3x - ky - 9 = 0$ 이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의 조건은?

- ① $-3 \leq k \leq 3$, $k < -6$ ② $k = 2$, $k = \pm 3$
 ③ $-3 < k < 3$, $k > 6$ ④ $k \neq 2$, $k \neq \pm 3$
 ⑤ $-3 < k$ 또는 $k > 3$

해설

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ x - y - 4 = 0 & \cdots \textcircled{2} \\ 3x - ky - 9 = 0 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

이 삼각형이 되려면 세 직선이 한 점에서 만나지 않고, 어느 두 직선도 평행하지 않아야 하므로

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 교점은 $(1, 3)$ 이 $\textcircled{3}$ 위에 있지 않다.

$$\therefore 3 + 3k - 9 \neq 0 \quad \therefore k \neq 2$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ 은 평행하지 않으므로

$$\frac{1}{3} \neq \frac{1}{-k} \rightarrow k \neq -3$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 은 평행하지 않으므로,

$$\frac{1}{3} \neq \frac{-1}{-k} \rightarrow k \neq 3$$

$$\therefore k \neq 2, k \neq \pm 3$$

16. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $P(a, b)$ 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k 에 관하여 정리하면

$$(x+2)k^2 + (x^2+x-2)k + (1-y) = 0$$

k 에 관한 항등식이므로

$$x+2=0, x^2+x-2=0, 1-y=0$$

$$\therefore x=-2, y=1$$

$$\therefore \text{구하는 점의 좌표는 } (-2, 1)$$

$$\therefore a=-2, b=+1$$

$$\therefore a+b=-1$$

17. 두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 가 외접할 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 의 중심 사이의 거리 $d = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$
두 원이 외접하면 $r + 2 = 5$ 이므로 $r = 3$

18. 두 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-5)^2 + y^2 = 4$ 의 공통내접선의 길이는?

① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설

두 원의 중심거리는
 $\overline{OO'} = \sqrt{(5-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{17}$
 $\overline{O'H} = \overline{O'B} + \overline{BH} = \overline{O'B} + \overline{OA} = 2 + 1 = 3$ 이므로
 $\overline{AB} = \overline{OH} = \sqrt{\overline{OO'}^2 - \overline{O'H}^2} = \sqrt{17 - 3^2} = 2\sqrt{2}$
따라서 공통내접선의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.

19. 다음 함수의 역함수를 구하면?

$$y = x^2 - 3(\text{단, } x \geq 0)$$

- ① $y = \sqrt{x+1}(\text{단, } x \geq -1)$
- ② $y = \sqrt{x+2}(\text{단, } x \geq -2)$
- ③ $y = \sqrt{x+3}(\text{단, } x \geq -3)$
- ④ $y = \sqrt{x+4}(\text{단, } x \geq -4)$
- ⑤ $y = \sqrt{x+5}(\text{단, } x \geq -5)$

해설

$x \geq 0$ 이면 $y = x^2 - 3 \geq -3$ 이므로 주어진 함수의 치역은 $\{y \mid y \geq -3\}$
한편, $y = x^2 - 3$ 을 x 에 대하여 풀면
 $x^2 = y + 3$ 에서 $x = \pm \sqrt{y+3}$
이 때, $x \geq 0$ 이어야 하므로
 $x = \sqrt{y+3}(\text{단, } y \geq -3)$
여기서, x, y 를 서로 바꾸면
구하는 역함수는 $y = \sqrt{x+3}(\text{단, } x \geq -3)$

20. $x = \frac{a}{b}$, $a \neq b$, $b \neq 0$ 일 때, $\frac{a+b}{a-b}$ 는?

- ① $\frac{x}{x+1}$ ② $\frac{x+1}{x-1}$ ③ 1 ④ $x - \frac{1}{x}$ ⑤ $x + \frac{1}{x}$

해설

$$a = bx \text{ 이므로 } \frac{a+b}{a-b} = \frac{bx+b}{bx-b} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{또는 } \frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

21. $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = 5$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} &= 1 - \frac{x-1}{x-1-x} \\ &= 1+x-1=x \\ \therefore x &= 5 \end{aligned}$$

22. $0 \leq a < 2$ 이고 $x = \frac{4a}{a^2 + 4}$ 일 때
 $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$1+x = 1 + \frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2+4a+4}{a^2+4} = \frac{(a+2)^2}{a^2+4}$$

$$1-x = 1 - \frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2-4a+4}{a^2+4} = \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$$

$a^2+4 > 0$ 이고 $0 < a < 2$ 이므로

$a+2 > 0$, $a-2 < 0$

$$\therefore \sqrt{1+x} = \sqrt{\frac{(a+2)^2}{a^2+4}} = \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{(a-2)^2}{a^2+4}} = \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} &= \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}} + \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{a^2+4}} \end{aligned}$$

$\therefore a=0$ 일 때 최댓값 2

23. 곡선 $y = \frac{2x+3}{x-1}$ 위의 임의의 점 P와 정점 A에 대하여 점 P의 점 A에 대한 대칭점이 곡선 $y = \frac{2x+3}{x-1}$ 위에 있을 때, 점 A의 좌표는?
- ① (1, 2) ② (2, 1) ③ (-1, 2)
- ④ (2, -1) ⑤ (-1, -2)

해설

점 P의 점 A에 대한 대칭점을 Q라 하면 선분 PQ의 중점이 A
이므로 곡선 $y = \frac{2x+3}{x-1}$ 이 점 A에 대하여 대칭이다.

$$y = \frac{2x+3}{x-1} = \frac{2(x-1)+5}{x-1} = \frac{5}{x-1} + 2 \text{ 에서}$$
$$y = \frac{2x+3}{x-1} \text{은 원점에 대하여 대칭인 곡선}$$
$$y = \frac{5}{x} \text{를 } x\text{축의 방향으로 1만큼}$$
$$y\text{축의 방향으로 2만큼 평행이동한 곡선이므로}$$

점 (1, 2)에 대하여 대칭이다.
[참고-분수식은 점근선의 교점에 관한 점대칭이다.]

24. $|p| < 2$ 를 만족하는 모든 실수 p 에 대하여 부등식 $x^2 + px + 1 > 2x + p$ 가 성립하도록 하는 x 의 값의 범위는?

- ① $x \leq -3, x = -1, x \geq 1$
- ② $x \leq -1, x = 1, x \geq 3$
- ③ $x \leq -3, x \geq 1$
- ④ $x \leq -1, x \geq 3$
- ⑤ $-3 \leq x \leq -1$

해설

$x^2 + px + 1 > 2x + p, (x - 1)p + x^2 - 2x + 1 > 0$

$f(p) = (x - 1)p + x^2 - 2x + 1$ 이라 하면

$-2 < p < 2$ 에서 $f(p) > 0$ 이기 위한 조건은

$f(-2) \geq 0$ 이고 $f(2) \geq 0$ 이어야 한다.

$f(-2) \geq 0$ 에서 $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

$\therefore (x - 1)(x - 3) \geq 0$

$\therefore x \leq 1, x \geq 3 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

$f(2) \geq 0$ 에서 $x^2 - 1 \geq 0$

$\therefore (x + 1)(x - 1) \geq 0$

$\therefore x \leq -1, x \geq 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 에서 $\therefore x \leq -1, x = 1, x \geq 3$

그런데 $x = 1$ 일 때,

$f(p) = 0 \cdot p + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ 이므로

주어진 조건을 만족하지 않는다.

따라서 구하는 x 값의 범위는 $x \leq -1, x \geq 3$

25. 두 부등식 $x^2 - 2x - 8 > 0$,
 $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a < 0$ 에 대하여 공통범위가 존재하지 않도록
하는 실수 a 의 범위를 $b \leq a \leq c$ 라 할 때, $b + c$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(x - 4)(x + 2) > 0$,
 $\therefore x > 4, x < -2$
 $x^2 - (2a + 1)x + a(a + 1) < 0$
 $(x - a)(x - a - 1) < 0$
두 부등식의 공통범위가 없으려면
 $a \geq -2, a + 1 \leq 4 \rightarrow a \leq 3$
 $\therefore -2 \leq a \leq 3$
 $\therefore b = -2, c = 3$
 $\therefore b + c = 1$

26. 자연수를 원소로 하는 집합 A 가 「 $x \in A$ 이면 $5 - x \in A$ 이다.」를 만족한다. 이러한 성질을 만족하는 집합 A 의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

x 와 $5 - x$ 가 자연수이므로 $x \geq 1$, $5 - x \geq 1 \therefore 1 \leq x \leq 4$
㉠ $1 \in A$ 이면 $5 - 1 = 4 \in A$
㉡ $2 \in A$ 이면 $5 - 2 = 3 \in A$ 이므로
1, 4는 동시에 집합 A 에 속하고, 마찬가지로 2, 3도 동시에 집합 A 에 속해야 한다.
따라서, 구하는 집합 A 는 {1, 4}, {2, 3}, {1, 2, 3, 4}의 3개다.

27. 집합 $A = \{x \mid 15 < x < 30, x = 3n + 2(n \text{은 자연수})\}$ 라고 할 때, 적어도 한 개의 짝수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는?

① 8 개 ② 16 개 ③ 24 개 ④ 32 개 ⑤ 40 개

해설

$A = \{17, 20, 23, 26, 29\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개) 이고, 이 중에서 짝수를 원소로 하나도 갖지 않는 부분집합은 원소 17, 23, 29로 만든 부분집합이므로 $2^3 = 8$ (개) 이다.

$$\therefore 32 - 8 = 24 \text{ (개)}$$

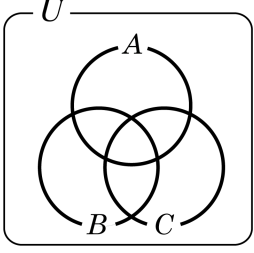
28. 두 집합 $A = \{x|1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x|3 < x < 7\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A - B) \cup X = X$ 를 만족시키는 집합 X 를 $X = \{x|p \leq x \leq q\}$ 라 할 때, q 의 최솟값과 최댓값을 차례대로 쓰면?

- ① 1, 3 ② 1, 5 ③ 1, 7 ④ 3, 5 ⑤ 3, 7

해설

조건에서 $X \subset A$, $(A - B) \subset X$ 즉, $\{x|1 \leq x \leq 3\} \subset X \subset \{x|1 \leq x \leq 5\}$
 $X = \{x|p \leq x \leq q\}$ 에서 $p = 1$, $3 \leq q \leq 5$

29. 집합 A, B, C 가 전체집합 U 의 부분집합으로서 다음 그림과 같이 주어졌다. 두 집합 P, Q 에 대하여 $P \circ Q$ 를 $P \circ Q = (P - Q) \cup (Q - P^c)$ 와 같이 정의할 때, $A \circ A$ 의 값을 구하면?



- ① A ② B ③ C ④ $\emptyset$ ⑤ $A - B$

해설

$P \circ Q = (P - Q) \cup (Q - P^c)$ 이므로
 $A \circ A = (A - A) \cup (A - A^c) = \emptyset \cup A = A$ 이다.

30. 집합 $M = \{x \mid |x| < m \text{인 유리수}\}$ 의 부분집합 A_n 을 $A_n = \left\{x \in M \mid x - [x] = \frac{1}{n}, n \text{은 } 2 \text{이상의 자연수}\right\}$ 라고 정의하자. A_n 의 원소의 개수가 30일 때, 정수 m 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수이다.)
- ① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

집합 A_2 에서 $x - [x] = \frac{1}{2}$ 이므로
 $A_2 = \left\{\cdots, -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots\right\}$
집합 A_3 에서 $x - [x] = \frac{1}{3}$ 이므로
 $A_3 = \left\{\cdots, -\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \cdots\right\}$
집합 A_n 에서 $x - [x] = \frac{1}{n}$ 이므로
 $A_n = \left\{\cdots, -2 + \frac{1}{n}, -1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}, \cdots\right\}$
따라서 A_n 의 원소는 n 의 값에 관계없이 모든 정수 사이에 1개씩 있으므로 원소의 개수가 30일 때 $m = 15$

31. $a + b = 1$ 이고 $a^2 + b^2 = -1$ 일 때, $a^{2005} + b^{2005}$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$b = 1 - a$ 를 $a^2 + b^2$ 에 대입하여 정리하면
 $a^2 - a + 1 = 0 \ (a + 1)(a^2 - a + 1) = 0$
 $a^3 + 1 = 0 \ \therefore a^3 = -1$
마찬가지 방법으로 $b^3 = -1$
 $a^{2005} + b^{2005} = (a^3)^{668} \cdot a + (b^3)^{668} \cdot b = a + b = 1$

해설

a^3, b^3 의 값을 다음과 같이 구해도 된다.
 $a^2 - a + 1 = 0$ 에서 $a^2 = a - 1$
 $a^3 = a^2 \cdot a = (a - 1) \cdot a = a^2 - a = -1$
마찬가지 방법으로 $b^3 = -1$

- 32.** x 에 대한 이차방정식 $x^2 - (p+1)x + p+5 = 0$ 의 두근 α, β 가 모두 양의 정수일 때, $\alpha > \beta$ 를 만족하는 순서쌍 (α, β) 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 1 개

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = p + 1, \alpha\beta = p + 5$$

$$\therefore \alpha + \beta - 1 = \alpha\beta - 5$$

$$\therefore (\alpha - 1)(\beta - 1) = 5$$

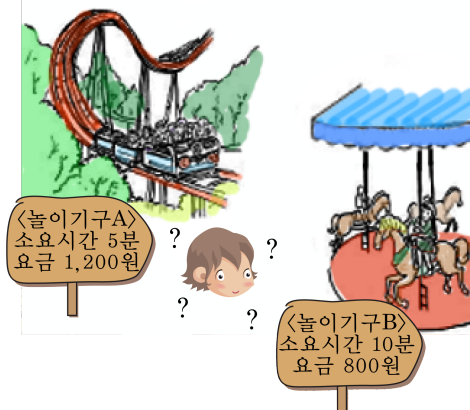
α, β 모두 양의 정수이고, $\alpha > \beta$ 이므로

$$\alpha - 1 = 5, \quad \beta - 1 = 1$$

$$\alpha = 6, \beta = 2$$

$\therefore (6, 2)$ 1 개

33. 놀이공원에서 두 종류의 놀이기구 A 와 B 를 타려고 하는데 두 놀이기구 A, B 의 1 회 소요시간은 각각 5 분, 10 분이고, 요금은 각각 1,200 원, 800 원이라 한다. 철수가 자유 시간 2 시간 동안 15,000 원으로 놀이기구를 탈 수 있는 횟수의 최댓값을 구하여라. (단, 이동시간과 기다리는 시간은 고려하지 않는다.)

▶ 답: 회

▶ 정답 : 15회

해설

놀이기구 A, B 를 각각 x, y 번 탔다고 할 때,
 독립부등식 $5x + 10y \leq 120, 1200x + 800y \leq 15000$ 을 동시에 만족시키는 x, y 영역을 그리면,
 이 중 x, y 가 자연수이므로 주어진 조건에서 횟수가 최대인 것은 (7, 8), (6, 9) 이다.
 따라서 횟수의 최댓값은 15

