1. 이차함수 $y = 12x - (1+3x)(1-3x)$ 가 $x = p$ 에서 최소이고 최솟값은 q 일 때, $p+q$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{17}{3}$　② $-\frac{5}{3}$　③ 0　④ $\frac{8}{3}$　⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$y = 12x - (1+3x)(1-3x) = 9x^2 + 12x - 1$

$= 9\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 5 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5$

따라서, $x = -\frac{2}{3}$ 일 때 최소이고

최솟값은 -5 이므로

$p = -\frac{2}{3}$, $q = -5$

$\therefore p + q = -\frac{17}{3}$

2. 이차함수 $y = -x^2 - 2x + 7(-3 \le x \le 1)$ 의 최댓값을 a, 최솟값을 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 4 ② 7 ③ 8 ④ 11 ⑤ 12

해설

$y = -x^2 - 2x + 7 = -(x+1)^2 + 8$ 이므로
꼭짓점의 좌표는 $(-1, 8)$ 이고, 위로 볼록한 포물선이다.
주어진 구간의 양 끝값을 구하면,
$x = -3$ 일 때 $y = -(-3+1)^2 + 8 = 4$
$x = 1$ 일 때 $y = -(1+1)^2 + 8 = 4$ 이다.
따라서 최댓값 $a = 8$ 이고, 최솟값 $b = 4$ 이므로 $a + b = 12$

3. 다음 연립방정식의 해를 구하면?

$$\begin{cases} 0.6x + 0.5y = 2.8 & \cdots ㉠ \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

① $(2, 3)$ ② $(-2, 3)$ ③ $(3, 2)$
④ $(3, -2)$ ⑤ $(-3, -2)$

해설

㉠, ㉡의 양변에 각각 10, 6을 곱하면

$$\begin{cases} 6x + 5y = 28 & \cdots\cdots ㉢ \\ 2x + 3y = 12 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉢ − ㉣×3을 하면 $-4y = -8$
$\therefore$ $y = 2$를 ㉣ 대입하면 $x = 3$
$\therefore$ $x = 3$, $y = 2$

4. 연립방정식 $\begin{cases} px+y=1 \\ x+py=1 \end{cases}$ 의 해가 없을 때의 p 값으로 알맞은 것은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ -2

해설

$ax+by=c,\ dx+ey=f$ 일때,

$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}\neq\frac{c}{f}$ 이면 해가 없음,

$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}$ 이면 해가 무수히 많다.

$p=\frac{1}{p}\neq 1$

$\therefore p=-1$

5. $-3a-2 < -3b-2$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a < b$
② $-3a > -3b$
③ $5a-3 > 5b-3$
④ $3-a > 3-b$
⑤ $\frac{a}{3} < \frac{b}{3}$

해설
$-3a-2 < -3b-2 \cdots ㉠$
$(㉠ + 2) \div (-3)$ 하면, $a > b$ 이다.
따라서 만족하는 식은 $5a-3 > 5b-3$

6. $-2 \le x \le 2$ 일 때, $\dfrac{20}{3-x}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$-2 \le x \le 2$ 에서
$-2 \le -x \le 2$,
$1 \le 3-x \le 5$
$\dfrac{1}{5} \le \dfrac{1}{3-x} \le 1$
$\therefore 4 \le \dfrac{20}{3-x} \le 20$
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 24

7. 이차부등식 $x^2 + 2x - 35 < 0$을 풀면?

① $-15 < x < 12$ ② $-15 < x < 5$ ③ $-7 < x < 5$
④ $-7 < x < 2$ ⑤ $-5 < x < 7$

해설

$x^2 + 2x - 35 < 0$에서 $(x+7)(x-5) < 0$
$\therefore -7 < x < 5$

8. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2 \therefore\ a + b = 14$

9. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$　② $m < 1, m > 5$　③ $-1 < m < 3$
④ $-1 < m < 5$　⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면
$x^2 + (m-3)x + 1 = 0, D = (m-3)^2 - 4 > 0$
$m^2 - 6m + 5 > 0, (m-1)(m-5) > 0$
$\therefore\ m < 1,\ m > 5$

10. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$일 때, 상수 k의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = -3x^2 - 6x + k = -3(x^2 + 2x + 1) + k + 3 = -3(x+1)^2 + k + 3$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k+3)$ 이다.
주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.
$\therefore\ k + 3 = \frac{5}{2} \qquad \therefore\ k = -\frac{1}{2}$

11. $x(x-1)(x+1)-6=0$의 세근을 구하면?

① $2,\ -1,\ -3$ ② $-2,\ 1,\ -3$ ③ $2,\ 1,\ -3$
④ $-2,\ -1 \pm \sqrt{2}i$ ⑤ $2,\ -1 \pm \sqrt{2}i$

해설

준식$= x(x^2-1)-6 = x^3-x-6=0$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-2)(x^2+2x+3)=0$
$\therefore\ x=2, -1 \pm \sqrt{2}i$

12. 다음 삼차방정식을 풀었을 때 두 허근의 합을 구하여라.

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $f(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 2$ 를 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & 1 & -6 \\ & & 2 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

위의 조립제법에서 $f(x) = (x-2)(x^2+x+3)$ 이므로 주어진 방정식은$(x-2)(x^2+x+3) = 0$

$\therefore x = 2\ ,\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$

두 허근의 합은 -1

13. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$의 모든 실근의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$에서
$x^2 = t$로 치환하면
$t^2 + 3t - 10 = 0$, $(t+5)(t-2) = 0$
$\therefore\ t = -5$ 또는 $t = 2$
$\therefore\ x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

14. 삼차방정식 $2x^3 - 7x^2 + 11x + 13 = 0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha + \beta + \gamma$
(나) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$ ② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

15. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2+y^2=5$

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$

$\therefore\ xy=2$

16. x에 대한 부등식 $(a+b)x+a-2b>0$의 해가 $x<1$일 때, x에 대한 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$의 해는?

① $x<-10$　② $x<-5$　③ $x>-5$

④ $x<5$　⑤ $x>5$

해설

$(a+b)x+a-2b>0$에서 $(a+b)x>-a+2b\cdots$㉠

㉠의 해가 $x<1$이려면 $a+b<0\cdots$㉡

㉠이 양변을 $a+b$로 나누면 $x<\dfrac{-a+2b}{a+b}$이므로

$\dfrac{-a+2b}{a+b}=1,\ -a+2b=a+b$

$\therefore 2a=b\cdots$㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $a+2a=3a<0\ \therefore a<0$

㉢을 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$에 대입하면

$(2a-3a)x+a+4a>0,\ -ax>-5a\ \ \therefore x>5$

17. 부등식 $x^2 - kx + 2 > 0$이 항상 성립하도록 하는 상수 k의 범위를 구하면 $a < k < b$이다. 이 때, ab의 값은?

① -10 ② -9 ③ -8 ④ -7 ⑤ -6

해설

$x^2 - kx + 2 > 0$이 항상 성립하려면
판별식이 실근을 갖지 않을 때이므로
$D = k^2 - 4 \cdot 2 < 0$
$k^2 - 8 < 0,\ \left(k - 2\sqrt{2}\right)\left(k + 2\sqrt{2}\right) < 0$
$\therefore -2\sqrt{2} < k < 2\sqrt{2}$
따라서 $a = -2\sqrt{2},\ b = 2\sqrt{2}$이므로
$ab = -2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = -8$

18. $ax^2 - 2ax + 3 < 0$를 만족하는 x가 없도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a > 0$ ② $-1 < a < 3$ ③ $0 \le a \le 3$

④ $-1 < a < 4$ ⑤ $-1 \le a \le 4$

해설

(i) $a = 0$일 때, 성립한다.

(ii) $a \ne 0$일 때, 함수 $y = ax^2 - 2ax + 3$에서 $D \le 0$이므로
$a^2 - 3a \le 0$

$\therefore 0 < a \le 3 (\because a \ne 0)$

19. 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \le 0 \\ x^2 + 2x + 2 \ge 0 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

$x^2 - 2x + 1 \le 0 \rightarrow (x-1)^2 \le 0$
$(x-1)^2$ 은 항상 0 이상이므로
만족하는 해는 $x = 1$ 이 유일
$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$
$\rightarrow (x+1)^2 + 1 \ge 1$
$\therefore$ 모든 실수
$\therefore x = 1$

20. 함수 $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$t = x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면
$y = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 \cdots$ ㉠
또, $t = (x - 1)^2 + 2$ 이므로
$t \geq 2 \cdots$ ㉡
㉡의 범위에서 ㉠의 최솟값은
$t = 2$일 때 1이다.

21. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$일 때, 유리수 m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$를 주어진 방정식에 대입하면
$(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$
이 식을 정리하면
$(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$
무리수가 서로 같은 조건에 의하여
$260 - 26m = 0$, $160 - 16m = 0$
따라서, $m = 10$
계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$도 근이다.
나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수와의 관계에서
$(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m$ ······㉠
$(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4$ ······㉡
㉠에서 $\alpha = m - 8$ ······㉢
㉡에서 $8\alpha = 2m - 4$ ······㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $8(m - 8) = 2m - 4$
$\therefore\ m = 10$

22. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

㉠ $\omega^6=1$	㉡ $\omega^2=\overline{\omega}$
㉢ $\omega+\overline{\omega}=-1$	㉣ $\omega^2+\omega=-1$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로,
$\omega^3=1,\ (x-1)(x^2+x+1)=0$
$\omega^2+\omega+1=0$ 켤레근 $\overline{\omega}$일 경우도
$\overline{\omega}^3=1,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$
㉠ $\omega^3=1,\ (\omega^3)^2=1 \rightarrow (◯)$
㉢ $\omega+\overline{\omega}=-1$,
$\overline{\omega}=-1-\omega=-(\omega+1)$
$\omega^2+\omega+1$을 이용.
$\omega+1=-\omega^2$이므로 $\overline{\omega}=\omega^2 \rightarrow (◯)$
㉡ 두 근 $\omega, \overline{\omega}$의 합은
$x^2+x+1=0$의 두 근의 합이므로
$\omega+\overline{\omega}=-1$
㉣ $\omega^2+\omega+1=0$,
$\omega^2+\omega=-1 \rightarrow (◯)$

23. 허수 w가 $\omega^3 = 1$을 만족할 때, $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$w^3 = 1 \Rightarrow \quad (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$$

$\therefore \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$

$= \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2$

$= (\omega^2 + \omega + 1) + \omega^2 + \omega = -1$

24. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{180} 의 값을 구하면?

① 180　② -180　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설
$x^2 - x + 1 = 0$ 양변에
$(x+1)$을 곱하면, $x^3 + 1 = 0$
$x^3 = -1 \Rightarrow x^{180} = (x^3)^{60} = (-1)^{60} = 1$

25. 다음 방정식을 만족하는 실수 $x,\ y$의 합을 구하여라.

$$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

해설

$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$에서 $x^2y^2+4x^2+y^2+4-8xy=0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면
$(x^2y^2-4xy+4)+(4x^2 4xy+y^2)=0$
이 때, $x,\ y$가 실수이므로 $xy-2,\ 2x-y$도 실수이다.
$\therefore xy-2=0 \quad \cdots$ ㉠,
$2x-y=0 \quad \cdots$ ㉡
㉡에서 $y=2x$이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2=1$
따라서, $x=1$일 때 $y=2$, $x=-1$일 때 $y=-2$
그러므로 $x,\ y$의 값은 $x=\pm1,\ y=\pm2$(복부호 동순)
따라서 $x,\ y$의 합은 $-3, 3$