

1. $\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{101}{100}$

② $\frac{100}{101}$

③ $\frac{200}{201}$

④ $\frac{110}{101}$

⑤ $\frac{201}{200}$

해설

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots +$$

$$\left(\frac{1}{199} - \frac{1}{200}\right) + \left(\frac{1}{200} - \frac{1}{201}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{201} = \frac{200}{201}$$

2. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26

② 31

③ 36

④ 46

⑤ 51

해설

$$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 - n \text{ 이므로 } a_2 = a_1^2 - 1 = 3$$

$$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$$

$$a_4 = a_3^2 - 1 = 8^2 - 1 = 63$$

3. 등차수열 $-3, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, 21$ 에 대하여 $x_4 + x_5$ 의 값은?

① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

해설

주어진 등차수열의 공차를 d 라고 하면 21은 제 9항이므로
 $21 = -3 + 8d \quad \therefore d = 3$
따라서, 주어진 수열은 첫째항이 -3 , 공차가 3인 등차수열이고,
 x_4, x_5 은 각각 제 5항, 제 6항이므로
 $x_4 = -3 + (5 - 1) \cdot 3 = 9$
 $x_5 = -3 + (6 - 1) \cdot 3 = 12$
따라서 $x_4 + x_5$ 은 21이다.

4. 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고 $a_3+a_6+a_9=9$, $a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{14}=99$ 일 때, $a_k=15$ 를 만족하는 k 의 값은?

① 10 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 20

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$a_3+a_6+a_9=9$ 에서

$$(a+2d)+(a+5d)+(a+8d)=9$$

$$3a+15d=9 \quad \therefore a+5d=3 \cdots \textcircled{1}$$

$a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{14}=99$ 에서

$$\frac{9\{(a+5d)+(a+13d)\}}{2}=99$$

$$\therefore a+9d=11 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $d=2$, $a=-7$

$$\therefore a_n=-7+(n-1)\cdot 2=2n-9$$

따라서 $a_k=2k-9=15$ 에서

$$2k=24 \quad \therefore k=12$$

5. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = -n^2 + 5n + 6$ 일 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ 수열 $\{S_{n+1} - S_n\}$ 은 등차수열이다.
㉡ 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
㉢ $a_n < 0$, $S_n > 0$ 을 동시에 만족하는 자연수 n 의 개수는 2개이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$\textcircled{1} \ S_{n+1} - S_n = \{-(n+1)^2 + 5(n+1) + 6\} - (-n^2 + 5n + 6) = -2n + 4$$

따라서 수열 $\{S_{n+1} - S_n\}$ 은 공차가 -2 인 등차수열이다. (참)

$$\textcircled{2} \ a_1 = S_1 = 10$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (-n^2 + 5n + 6) - \{-(n-1)^2 + 5(n-1) + 6\}$$

$$= -2n + 6$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 $10, 2, 0, -2, -4, \dots$ 이므로 등차수열이 아니다. (거짓)

$$\textcircled{3} \ a_n < 0 \text{에서 } -2n + 6 < 0, \ n > 3 \ (\because a_1 = 10 > 0)$$

$$S_n > 0 \text{에서 } -n^2 + 5n + 6 > 0, \ n^2 - 5n - 6 < 0$$

$$(n+1)(n-6) < 0, \ n < 6$$

$$\therefore 3 < n < 6$$

즉, 자연수 n 의 값은 $4, 5$ 의 2개이다.(참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

6. 8과 27사이에 두 수 x, y 를 넣었더니 8, $x, y, 27$ 이 이 차례로 등비수열을 이루었다. 이때, $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

8, $x, y, 27$ 이 등비수열이므로

$$a_1 = 8$$

$$a_4 = a_1 r^3 = 27, \quad 8r^3 = 27$$

$$r^3 = \frac{27}{8}, \quad \therefore r = \frac{3}{2}$$

$$x = a_1 r = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12$$

$$y = a_1 r^2 = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 8 \cdot \frac{9}{4} = 18$$

$$\therefore x + y = 12 + 18 = 30$$

7. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합이 5, 첫째항부터 제 20항까지의 합이 30일 때, 첫째항부터 제 30항까지의 합은?

- ① 124 ② 132 ③ 145 ④ 155 ⑤ 162

해설

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 5 \\ S_{20} &= \frac{a(r^{20}-1)}{r-1} = \frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1} = 30 \\ r^{10}+1 &= 6 \text{ 이므로 } r^{10} = 5 \\ S_{30} &= \frac{a(r^{30}-1)}{r-1} \\ a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) \text{ 이므로} \\ S_{30} &= \frac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1} \\ &= 5 \cdot (r^{20}+r^{10}+1) \\ &= 5 \cdot (5^2+5+1) \\ &= 5 \cdot 31 = 155 \end{aligned}$$

8. 높이가 h 인 탑을 쌓으려고 한다. 첫 번째 날에는 탑 높이의 절반을 쌓고, 두 번째 날에는 전날 쌓은 높이의 절반을 쌓는다. 이와 같은 방법으로 10일 동안 탑을 쌓았더니 탑의 높이가 $a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ 이 되었을 때, $\frac{a}{h}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

n 번째 날의 탑의 높이를 a_n 이라 하면 $(n+1)$ 째 날 탑의 높이는 전날까지 쌓은 높이 a_n 과 그 높이의 절반인 $\frac{1}{2}a_n$ 의 합이므로

$$a_1 = \frac{h}{2} \text{ 이고, } a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n = \frac{3}{2}a_n$$

$$\therefore a_n = \frac{h}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{h}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^9 = \frac{h}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

$$\therefore a = \frac{h}{3} \text{ 이므로 } \frac{a}{h} = \frac{1}{3}$$

9. $9^x = 2$ 일 때, $\left(\frac{1}{27}\right)^{-4x}$ 의 값은?

① $\frac{1}{64}$

② $\frac{1}{16}$

③ 16

④ 64

⑤ 256

해설

$9^x = 2$ 이므로 $3^{2x} = 2$ 이다.

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= (3^{-3})^{-4x} = 3^{12x} \\ &= (3^{2x})^6 = 2^6 = 64\end{aligned}$$

10. 등식 $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = \log_3(\log_4(\log_2 y)) = \log_4(\log_2(\log_3 z)) = 0$ 이 성립할 때, $x + y + z$ 의 값은?

① 58

② 64

③ 75

④ 89

⑤ 93

해설

$$\log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0 \text{에서 } \log_3(\log_4 x) = 1$$

$$\log_4 x = 3 \quad \therefore x = 4^3 = 64$$

$$\log_3(\log_4(\log_2 y)) = 0 \text{에서 } \log_4(\log_2 y) = 1$$

$$\log_2 y = 4 \quad \therefore y = 2^4 = 16$$

$$\log_4(\log_2(\log_3 z)) = 0 \text{에서 } \log_2(\log_3 z) = 1$$

$$\log_3 z = 2 \quad \therefore z = 3^2 = 9$$

$$\therefore x + y + z = 64 + 16 + 9 = 89$$

11. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.123}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.6966

해설

상용로그표에서 $\log 1.23 = 0.0899$ 이므로
 $\log \sqrt[3]{0.123} = \frac{1}{3} \log 0.123 = \frac{1}{3} \log 1.23 \times 10^{-1}$
 $= \frac{1}{3}(\log 1.23 - 1) = \frac{1}{3}(0.0899 - 1)$
 $= -0.3034 = -1 + 0.6966$
따라서 $\log \sqrt[3]{0.123}$ 의 소수 부분은 0.6966 이다.

12. $\sum_{k=1}^{100} [\log_3 n]$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

- (i) $n = 1, 2$ 일 때, $0 \leq \log_3 n < 1$ 이므로 $[\log_3 n] = 0$
 - (ii) $3 \leq n < 9$ 일 때, $1 \leq \log_3 n < 2$ 이므로 $[\log_3 n] = 1$
 - (iii) $9 \leq n < 27$ 일 때, $2 \leq \log_3 n < 3$ 이므로 $[\log_3 n] = 2$
 - (iv) $27 \leq n < 81$ 일 때, $3 \leq \log_3 n < 4$ 이므로 $[\log_3 n] = 3$
 - (v) $81 \leq n < 100$ 일 때, $4 \leq \log_3 n < 5$ 이므로 $[\log_3 n] = 4$
- (i) ~ (v)로부터
- $$\sum_{k=1}^{100} [\log_3 n] = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 54 + 4 \cdot 20 = 284$$

13. 해수면의 빛의 밝기가 A 인 어느 지역의 바닷물은 깊이가 일정하게 깊어질수록 빛의 밝기가 일정한 비율로 감소한다고 한다. 깊이가 $x\text{m}$ 인 곳의 빛의 밝기를 L 이라 하면 다음과 같은 관계가 있다.

$$L = Ak^x \text{ (단, } k \text{ 는 } k \neq 1 \text{ 인 양의 상수)}$$

이 지역의 바다에서 깊이가 20m 인 곳의 빛의 밝기는 해수면의 빛의 밝기의 50% 일 때, 물속에서의 빛의 밝기가 해수면의 빛의 밝기의 $\frac{1}{6}$ 이 되는 지점의 수심은 $a\text{m}$ 이다. 이때, 실수 a 의 값을 구하여라. (단, $\log_2 3 = 1.6$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

깊이가 20m 인 곳의 빛의 밝기는 해수면의 빛의 밝기 A 의 50% 이므로

$$Ak^{20} = \frac{1}{2}A \quad \therefore k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}} = 2^{-\frac{1}{20}}$$

따라서, 빛의 밝기가 해수면의 빛의 밝기의 $\frac{1}{6}$ 이 되는 지점의 수심을 $x\text{m}$ 라 하면

$$A \cdot 2^{-\frac{x}{20}} = \frac{1}{6}A \quad \therefore 2^{-\frac{x}{20}} = \frac{1}{6}$$

위의 식의 양변에 밑이 2 인 로그를 취하면

$$-\frac{x}{20} = \log_2 \frac{1}{6} = -\log_2 6$$

$$\therefore x = 20(\log_2 2 + \log_2 3) \\ = 20(2 + 1.6) = 72(\text{m})$$

14. 수열 3, 4, 6, 10, 18, ... 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은?

- ① $2n^2 + 2n - 1$
- ② $n^2 + 2n + 1$
- ③ $2^n + 2n - 1$
- ④ $n^2 - 2n + 1$
- ⑤ $2^n - 2n$

해설

$\{a_n\} : 3, 4, 6, 10, 18, \dots$

$\{b_n\} : \begin{matrix} & \vee & \vee & \vee & \vee \\ 1, & 2, & 4, & 8, & \dots \end{matrix}$

$a_n = 3 + \underbrace{(1 + 2 + 4 + \dots)}_{(n-1)\text{개}}$

$= 3 + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} + 2$

$\therefore S_n = \sum_{k=1}^n (2^{k-1} + 2) = \frac{2^n - 1}{2 - 1} + 2n$
 $= 2^n + 2n - 1$

15. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1, 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = (n+2)a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 과 같이 정의될 때, $a_n > 100$ 을 만족시키는 최소의 자연수 n 의 값은?

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n$ 이라 하면 $3S_n = (n+2)a_n \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $3S_{n-1} = (n+1)a_{n-1} \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $S_n - S_{n-1} = a_n$ 이므로 $\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 에서
 $3(S_n - S_{n-1}) = (n+2)a_n - (n+1)a_{n-1}$
 $3a_n = (n+2)a_n - (n+1)a_{n-1}$
 $\therefore a_n = \frac{n+1}{n-1} a_{n-1} \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉢}$ 의 양변에 $n = 2, 3, 4, \cdots, n$ 을 대입하여 변끼리 곱하면
 $a_2 = \frac{3}{1} a_1$
 $a_3 = \frac{4}{2} a_2$
 $a_4 = \frac{5}{3} a_3$
 $\vdots$
 $\left. \vphantom{\begin{matrix} \vdots \\ a_2 = \frac{3}{1} a_1 \\ a_3 = \frac{4}{2} a_2 \\ a_4 = \frac{5}{3} a_3 \end{matrix}} \right) a_n = \frac{n+1}{n-1} a_{n-1}$
 $a_n = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdots \frac{n+1}{n-1} a_1$
 $\therefore a_n = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+1)}{2}$
 이때, $\frac{n(n+1)}{2} > 100$ 에서 $\frac{13 \cdot 14}{2} = 91, \frac{14 \cdot 15}{2} = 105$ 이므로
 $n = 14$

16. 다음 세 실수 $A = \log_2 12 - \log_2 3$, $B = \frac{2\log_3 3\sqrt{3}}{\log_2 4}$, $C = 6^{2\log_6 \sqrt{3}}$ 의
대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

- ① $A < B < C$
- ② $A < C < B$
- ③ $B < A < C$
- ④ $C < A < B$
- ⑤ $C < B < A$

해설

로그의 성질을 이용하여 세 수를 간단히 한 후 비교한다.

$$A = \log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4 = 2$$

$$B = \frac{2\log_3 3\sqrt{3}}{\log_2 4} = \frac{2 \cdot \frac{3}{2} \log_3 3}{2\log_2 2} = \frac{3}{2}$$

$$C = 6^{2\log_6 \sqrt{3}} = 6^{\log_6 3} = 3^{\log_6 6} = 3$$

$$\therefore B < A < C$$

17. 수직선 위의 점 $P_n(n = 1, 2, 3, \dots)$ 이 있다. 임의의 자연수 n 에 대하여 두 점 P_n, P_{n+1} 을 2 : 1로 내분하는 점이 P_{n+2} 일 때, 점 P_{10} 의 좌표는?(단, 두 점 P_1, P_2 의 좌표는 각각 0, 3이다.)

- ㉠ $\frac{9}{4} + \frac{1}{4 \cdot 3^7}$ ㉡ $\frac{9}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^7}$ ㉢ $-\frac{9}{4} + \frac{1}{4 \cdot 3^7}$
 ㉣ $\frac{9}{4} + \frac{1}{4 \cdot 3^8}$ ㉤ $\frac{9}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^8}$

해설

점 $P_n(n = 1, 2, 3, \dots)$ 의 좌표를 a_n 이라 하면

$$a_{n+2} = \frac{2a_{n+1} + a_n}{2+1}, \quad \therefore 3a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0$$

따라서 $a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{3}(a_{n+2} - a_n)$ 이므로

$$a_n = 0 + \frac{3 \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^9 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4 \cdot 3^7}$$