

1. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로 $a_{10} = S_{10} - S_9 = (10^2 + 20) - (9^2 + 18) = 21$

2. 제 3 항이 -12 이고 제 6 항이 -96 인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$

② $(-3) \cdot 2^{n-1}$

③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$

⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$$a_3 = ar^2 = -12$$

$$a_6 = ar^5 = -96$$

$$r^3 = 8$$

$$\therefore r = 2$$

$$ar^2 = 4a = -12 \quad \therefore a = -3$$

$$\therefore a_n = (-3) \cdot 2^{n-1}$$

3. $8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}}$ 의 값을 2^x 라고 할 때, x 의 값을 구하면?

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} 8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} &= 2^4 \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{4+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2^5 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 5$$

4. 다음에서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건인 것은? (단, a, b, c 는 실수)

- ① $p : a = 1, b = 1, q : a + b = 2, ab = 1$
- ② $p : a, b$ 는 짝수, $q : a + b$ 는 짝수
- ③ $p : a = b, q : ac = bc$
- ④ $p : a - 1 = 0, q : a^2 - 1 = 0$
- ⑤ $p : ab > 0, q : |a + b| = |a| + |b|$

해설

- ㉠ 충분조건 ㉡ 충분조건 ㉢ 충분조건
- ㉣ 충분조건 $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$

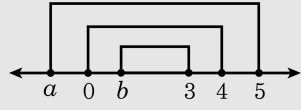
5. 두 조건 $a \leq x \leq 5$, $b \leq x \leq 3$ 이 각각 조건 $0 \leq x \leq 4$ 이기 위한 필요조건과 충분조건일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$0 \leq x \leq 4 \Rightarrow a \leq x \leq 5$$

$$b \leq x \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4$$



$$\therefore a \leq 0, b \geq 0$$

a 의 최댓값, b 의 최솟값 모두 0이다.

6. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = -n^2 + 2n$ 일 때, $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -280

해설

$$\begin{aligned} & a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20} \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}) \\ &= (-20^2 + 2 \times 20) - (-10^2 + 2 \times 10) \\ &= -360 - (-80) = -280 \end{aligned}$$

7. 첫째항부터 제5항까지의 합이 30, 첫째항부터 제10항까지의 합이 90인 등비수열의 첫째항부터 제15항까지의 합은?

㉠ 210 ㉡ 220 ㉢ 230 ㉣ 240 ㉤ 250

해설

첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$S_5 = 30$, $S_{10} = 90$ 이므로

$$S_5 = \frac{a(r^5 - 1)}{r - 1} = 30 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_{10} = \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^5 - 1)(r^5 + 1)}{r - 1} = 90 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $30(r^5 + 1) = 90 \therefore r^5 = 2$

따라서 첫째항부터 제15항까지의 합 S_{15} 는

$$\begin{aligned} S_{15} &= \frac{a(r^{15} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^5 - 1)(r^{10} + r^5 + 1)}{r - 1} \\ &= 30(2^2 + 2 + 1) = 210 \end{aligned}$$

8. 수열 1, 11, 111, 1111, ... 에서 제100 항은?

① $\frac{10^{200} - 1}{9}$

② $\frac{10^{100} - 1}{9}$

③ $10^{100} + 1$

④ $\frac{10^{200} - 1}{9}$

⑤ $10^{200} + 1$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 10 + 1$$

$$a_3 = 10^2 + 10 + 1$$

$\vdots$

$$a_n = 10^{(n-1)} + \cdots + 10^2 + 10 + 1$$

$$= \frac{1 \{10^n - 1\}}{10 - 1} = \frac{1}{9}(10^n - 1)$$

$$\therefore a_{100} = \frac{10^{100} - 1}{9}$$

9. $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=60$, $\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^2=20$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$ 의 값은?

- ① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=60$ 에서 $\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+2a_k+1)=60$
 $\sum_{k=1}^{10}a_k^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1=60\cdots\cdots\textcircled{\tiny \text{㉠}}$
 $\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^2=20$ 에서 $\sum_{k=1}^{10}(a_k^2-2a_k+1)=20$
 $\sum_{k=1}^{10}a_k^2-2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1=20\cdots\cdots\textcircled{\tiny \text{㉡}}$
 $\textcircled{\tiny \text{㉠}}-\textcircled{\tiny \text{㉡}}$ 을 계산하면
 $4\sum_{k=1}^{10}a_k=40 \quad \therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=10$

10. 수열 $1 \cdot 1, 2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 4 \cdot 7, \dots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

① $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

② $\frac{1}{6}n(n+1)(2n-2)$

③ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

④ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+1)$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_k 라 하면

$$a_k = k(2k-1) = 2k^2 - k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n (2k^2 - k)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1) \{2(2n+1) - 3\}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

11. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n$ 일 때,

$\sum_{k=1}^5 ka_k$ 의 값은?

- ① 110 ② 125 ③ 145 ④ 160 ⑤ 180

해설

$S_n = n^2 + 2n$ 이므로

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 + 2n) - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\}$$

$$= 2n + 1 (n = 2, 3, 4, \dots)$$

$n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$$

따라서

$$a_n = 2n + 1 (n = 1, 2, 3, \dots) \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^5 ka_k = \sum_{k=1}^5 k(2k + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^5 (2k^2 + k) = 2 \sum_{k=1}^5 k^2 + \sum_{k=1}^5 k$$

$$= 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} + \frac{5 \cdot 6}{2} = 125$$

12. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 일 때,
 $30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29})$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$$\begin{aligned} & 30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29}) \\ &= a_{30} + (a_{30} - a_1) + (a_{30} - a_2) + \cdots + (a_{30} - a_{29}) \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + \cdots + 30 \times \frac{1}{30} = 30 \end{aligned}$$

13. $a_1 = 110$ 인 수열 $\{a_n\}$ 은 다음을 만족한다.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = n^2 a_n \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1} \quad (n \geq 2) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 에서 $S_n - S_{n-1} = a_n$ 이므로

$$a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$$

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n \quad (n \geq 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= a_1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \cdots \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-1}{n+1} \quad \therefore a_{10} = 110 \times \\ &= 110 \times \frac{2}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{110} = 2$$

14. 세 자연수 a, b, c 의 최대공약수가 3이고, 등식 $2^a \cdot 5^b = 400^c$ 을 만족할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$400 = 2^4 \cdot 5^2$ 이므로

$$2^a \cdot 5^b = 400^c = (2^4 \cdot 5^2)^c = 2^{4c} \cdot 5^{2c}$$

따라서, $a = 4c, b = 2c$

a, b, c 의 최대공약수가 3이므로

$$c = 3, a = 12, b = 6$$

$$\therefore a + b + c = 12 + 6 + 3 = 21$$

15. $10^a = 2$, $10^b = 3$ 일 때, $\log_{15} 10$ 을 a , b 로 나타내면?

① $\frac{1}{a+b+1}$

② $\frac{1}{a-b+1}$

③ $\frac{1}{a+b-1}$

④ $\frac{1}{b-a+1}$

⑤ $\frac{1}{b-a-1}$

해설

$10^a = 2$, $10^b = 3$ 에서 $a = \log_{10} 2$, $b = \log_{10} 3$

$$\log_{15} 10 = \frac{1}{\log_{10} 15}$$

한편, $\log_{10} 15 = \log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \log_{10} 3 + \log_{10} \frac{10}{2}$

$$= \log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2 = b - a + 1$$

$$\therefore \log_{15} 10 = \frac{1}{b-a+1}$$

16. $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ 을 이용하여 $\log_{10} 1.08$ 의 값을 계산하면?

① 0.0327

② 0.0329

③ 0.0331

④ 0.0333

⑤ 0.0335

해설

$$\begin{aligned}\log_{10} 1.08 &= \log_{10} (2^2 \times 3^3 \div 100) \\ &= 2\log^2 + 3\log^3 - 2 \\ &= 0.0333\end{aligned}$$

17. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.138}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.7133

해설

상용로그표에서 $\log 1.38 = 0.1399$ 이므로

$$\begin{aligned}\log \sqrt[3]{0.138} &= \frac{1}{3} \log 0.138 = \frac{1}{3} \log (1.38 \times 10^{-1}) && \text{따 라 서} \\ &= \frac{1}{3}(\log 1.38 - 1) = \frac{1}{3}(0.1399 - 1) \\ &= -0.2867 = -1 + 0.7133\end{aligned}$$

$\log \sqrt[3]{0.138}$ 의 소수 부분은 0.7133이다.

18. 각 항이 모두 양수로 이루어진 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{\log a_n\}$ 은 어떤 수열인가?

- ① 공차가 a 인 등차수열 ② 공차가 $\log r$ 인 등차수열
③ 공차가 $\log a$ 인 등차수열 ④ 공차가 r 인 등비수열
⑤ 공차가 $\log r$ 인 등비수열

해설

$\{a_n\}$ 은 등비수열이고 $a_n > 0$ 이므로 공비를 r 이라고 하면

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r > 0$$

이때 양변에 상용로그를 취하면 $\log \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log r$

$$\therefore \log a_{n+1} - \log a_n = \log r$$

따라서 수열 $\{\log a_n\}$ 은 공차가 $\log r$ 인 등차수열이다.

19. 이차방정식 $x^2 - 2x + k = 0$ (k 는 실수)이 허근을 가질 때, $f(k) = k + 1 + \frac{1}{k-1}$ 의 최솟값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

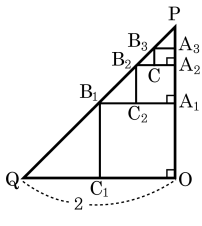
해설

$$\frac{D}{4} = 1 - k < 0 \text{ 이므로 } k - 1 > 0$$

$$f(k) = 2 + (k - 1) + \frac{1}{k - 1} \\ \geq 2 + 2\sqrt{(k - 1)\frac{1}{k - 1}} = 4$$

따라서 $f(k)$ 의 최솟값은 4이다.

20. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OP} = \overline{OQ} = 2$ 인 직각이등변 삼각형 OPQ에 정사각형 $OA_1B_1C_1$ 을 내접시킨다. 다시 직각이등변삼각형 A_1PB_1 에 정사각형 $A_1A_2B_2C_2$ 를 내접시킨다. 이와 같은 시행을 5회 반복할 때 만들어지는 정사각형의 넓이의 총합은?



- ① $\frac{3}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right\}$ ② $\frac{4}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^5 \right\}$
 ③ $\left\{ 1 + \left(\frac{1}{4} \right)^5 \right\}$ ④ $\frac{4}{3}$
 ⑤ $\frac{4}{3} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right\}$

해설

삼각형 OPQ는 $\overline{OP} = \overline{OQ} = 2$ 인 직각이등변삼각형이므로 내접시킨 정사각형의 한 변의 길이는 1이다. 즉, $\overline{OA_1} = 1$

마찬가지로 $\overline{A_1A_2} = \frac{1}{2}$, $\overline{A_3A_4} = \frac{1}{4}, \dots$

이때, 정사각형의 넓이는 1^2 , $\left(\frac{1}{2} \right)^2$, $\left(\frac{1}{4} \right)^2, \dots$ 이므로 구하는

정사각형의 넓이의 합은 첫째항이 1이고, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열

의 첫째항부터 제5항까지의 합이다.

$$\therefore \frac{1 \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^5 \right\}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^5 \right\}$$

21. $4^x = 3 + 2\sqrt{2}$ 일 때, $16^x + 16^{-x}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$4^x = 3 + 2\sqrt{2}$ 이므로

$$4^{-x} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$4^x + 4^{-x} = 6$, $4^x \cdot 4^{-4x} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} 16^x + 16^{-x} &= (4^x)^2 + (4^{-x})^2 \\ &= (4^x + 4^{-x})^2 - 2 \cdot 4^x \cdot 4^{-x} \\ &= 6^2 - 2 \cdot 1 = 34 \end{aligned}$$

22. a, b, p, q 가 1이 아닌 양수일 때,
 $\log_a p + \log_b q = 2$, $\log_p a + \log_q b = -1$ 이 성립한다.
 $(\log_a p)^2 + (\log_b q)^2$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$\log_a p = A$, $\log_b q = B$ 라 하면

$$A + B = 2$$

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = -1$$

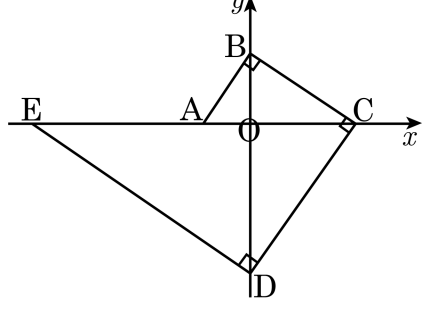
$$\frac{A+B}{AB} = -1$$

$$\frac{2}{AB} = -1$$

$$\therefore AB = -2$$

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= (A+B)^2 - 2AB \\ &= 4 - 2 \cdot (-2) \\ &= 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

23. 그림과 같이 좌표축 위의 다섯 개의 점 A, B, C, D, E에 대하여 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$, $\overline{CD} \perp \overline{DE}$ 가 성립한다. 세 선분 $\overline{AO}$, $\overline{OC}$, $\overline{EA}$ 의 길이가 순서대로 등차수열을 이룰 때, 직선 AB의 기울기는? (단, O는 원점이고 $\overline{OA} < \overline{OB}$ 이다.)



- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

점 A의 좌표를 $(-1, 0)$ 이라 놓고 풀어도 일반성을 잃지 않는다. 직선 AB의 기울기를 m 이라 하면, 점 B의 좌표는 $(0, m)$, 점 C의 좌표는 $(m^2, 0)$, 점 D의 좌표는 $(0, -m^3)$, 점 E의 좌표는 $(-m^4, 0)$ 이다. 그런데 $\overline{AO}$, $\overline{OC}$, $\overline{EA}$ 가 이순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\overline{OC} = \overline{AO} + \overline{EA}$$

$$\text{즉, } 2m^2 = 1 + (m^4 - 1)$$

$$\text{따라서 } m^4 = 2m^2 \text{에서 } m > 0 \text{이므로 } m = \sqrt{2}$$

24. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족할 때, $\sum_{k=1}^{40} a_k$ 의 값은?

- ㉠ $a_{4n} = n^2 \ (n \geq 1)$

㉡ $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \ (n \geq 1)$

① 210 ② 385 ③ 420 ④ 560 ⑤ 770

해설

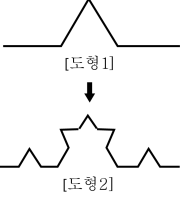
$$\begin{aligned} a_4 &= 1^2, \ a_4 = a_1 + a_2 + a_3 \\ a_8 &= 2^2, \ a_8 = a_5 + a_6 + a_7 \\ a_{40} &= 10^2, \ a_{40} = a_{37} + a_{38} + a_{39} \\ \therefore \sum_{k=1}^{40} a_k &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + \\ &\quad (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + \\ &\quad (a_{37} + a_{38} + a_{39} + a_{40}) \\ &= 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + 2 \cdot 10^2 \\ &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{10} k^2 = 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} \\ &= 770 \end{aligned}$$

25. 다음은 도형의 차원에 대한 설명이다.

선분을 2등분하면 2개의 선분으로 나누어지고 3등분하면 3개로 나누어진다. 이것을 각각 $2 = 2^1$, $3 = 3^1$ 로 나타낼 수 있으므로 선분의 차원은 1차원이다. 정사각형의 각 변을 2등분하면 정사각형 4개로 나누어지고 3등분하면 9개로 나누어진다. 이것을 각각 $4 = 2^2$, $9 = 3^2$ 로 나타낼 수 있으므로 정사각형의 차원은 2차원이다. 정육면체의 각 변을 2등분하면 정육면체 8개로 나누어지고 3등분하면 27개로 나누어진다. 이것을 각각 $8 = 2^3$, $27 = 3^3$ 로 나타낼 수 있으므로 정육면체의 차원은 3차원이다. 일반적으로 어떤 도형을 x 등분하여 같은 모양 y 개로 나뉘질 때, $y = x^a$ 의 관계가 성립하면 a 를 그 도형의 차원이라고 한다.

오른쪽 그림은 [도형1]을 이용하여 같은 모양으로

이루어진 [도형2]를 만든 것이다. 이때, [도형1]의 차원을 구하면?



- ① $\log 2$ ② $\log 3$ ③ $\frac{\log 3}{\log 2}$
④ $\frac{\log 2}{\log 3}$ ⑤ $2 \frac{\log 2}{\log 3}$

해설

[도형1]에서 도형의 각 변을 3등분하면 [도형2]와 같이 같은 도형 4개가 만들어진다.

즉, $x = 3$ 일 때, $y = 4$ 이므로 차원을 a 라 하면

$$4 = 3^a$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 4 = \log 3^a, \quad 2 \log 2 = a \log 3$$

$$\therefore a = \frac{2 \log 2}{\log 3}$$