1. $x^4+4x^3-2x^2+ax+b$가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b의 값은?

① $a=12,\ b=9$

② $a=-12,\ b=9$

③ $a=12,\ b=-9$

④ $a=-12,\ b=-9$

⑤ $a=9,\ b=12$

해설

$x^4+4x^3-2x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$으로 놓으면

이 식의 우변은

$x^4+2x^2(px+q)+(px+q)^2$

$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$

좌변과 계수를 비교하면

$2p=4,\ p^2+2q=-2$

$p=2,\ q=-3$에서

$a=2pq=-12,\ b=q^2=9$

2. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

x^2-2x-y^2+2y
$=(x^2-y^2)-2(x-y)$
$=(x+y-2)(x-y)$
$=(x+ay)(x-by+c)$
계수를 비교하면
$a=-1, b=-1, c=-2$
$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

3. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$이라 놓으면,
$x = -1$일 때, $-1 - 4 - 1 + 6 = 0$
따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.
즉, $f(x) = (x+1)Q(x)$몫
$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

-1	1	-4	1	6
		-1	5	-6
	1	-5	6	0

$f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x+1)$
$\therefore\ f(x) = (x-3)(x-2)(x+1)$
$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 = 14$

4. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+x=A$ 로 치환하면

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$=(A-2)(A-12)+24$

$=A^2-14A+48=(A-6)(A-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

$\therefore\ a+b+c-d=-2+3+1-(-8)=10$

5. 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립할 때, x^2-y^2의 값은?

$$[(x+y)^n+(x-y)^n]^2-[(x+y)^n-(x-y)^n]^2=4\times 3^n$$

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 7 ⑤ 9

해설

$[(x+y)^n+(x-y)^n]^2-[(x+y)^n-(x-y)^n]^2$

$=4\times 3^n$

$4\{(x+y)(x-y)\}^n=4\times 3^n$

$4(x^2-y^2)^n=4\times 3^n$

$\therefore\ x^2-y^2=3$

6. 다항식 $2x^2+xy+5x-y^2+2y+3$가 $(2x+ay+b)(x+cy+d)$로 인수분해 될 때, $a,\ b,\ c,\ d$의 값을 차례로 적은 것은?

① 1, 3, 1, 1 ② 1, 3, -1, 1 ③ -1, 3, 1, 1

④ -1, 3, -1, 1 ⑤ -1, -3, 1, 1

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 2x^2+(y+5)x-(y^2-2y-3)\\ &= \{2x-(y-3)\}\{x+(y+1)\}\\ &= (2x-y+3)(x+y+1)\end{aligned}$$

$\therefore a=-1, b=3, c=1, d=1$

7. 서로 다른 세 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 를 만족할 때, $x+y+z$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

$(x+y+z)=0$ 또는 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\therefore\ x+y+z=0$ 또는 $\dfrac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

그런데 $x,\ y,\ z$ 가 서로 다른 세 실수$(x\neq y\neq z)$ 이므로

$x+y+z=0$

8. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0$을 만족하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① $\angle B = 120°$인 둔각삼각형

② 직각삼각형

③ $\angle B = 150°$인 둔각삼각형

④ 이등변삼각형

⑤ $\angle A = 35°$인 예각삼각형

해설

$$a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$$
$$=a^2(b-c)+a(c+b)(c-b)+bc(b-c)$$
$$=(b-c)\left\{a^2+(c+b)a+bc\right\}$$
$$=(b-c)(a+b)(a+c)$$
$$\therefore b=c \ (\because a+b\neq 0,\ a+c\neq 0)$$

9. $a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)$를 인수분해 하였을 때, 다음 중 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a-b$ ② $b-c$ ③ $c-a$

④ $a+b+c$ ⑤ $ab+bc+ca$

해설

문자가 여러 개일 경우 동차식이면 어느 한 문자에 대하여 정리하고
차수가 다르면 차수가 낮은 문자에 대해 정리한다.

$\therefore$ (준식) $= a^3b^2 - a^2b^3 + b^3c^2 - b^2c^3 + c^3a^2 - c^2a^3$

$= (b^2-c^2)a^3 - (b^3-c^3)a^2 + b^2c^2(b-c)$

$= (b-c)\{(b+c)a^3 - (b^2+bc+c^2)a^2 + b^2c^2\}$

$= (b-c)\{(c^2-a^2)b^2 - a^2(c-a)b - a^2c(c-a)\}$

$= (b-c)(c-a)\{(c+a)b^2 - a^2b - a^2c\}$

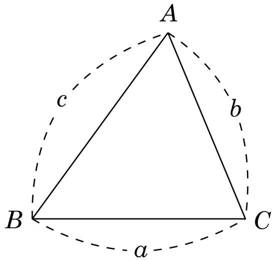
$= (b-c)(c-a)\{(b^2-a^2)c + ab(b-a)\}$

$= (b-c)(c-a)(b-a)\{(b+a)c + ab\}$

$= -(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

따라서 인수가 아닌 것은 ④이다.

10. 다음 그림과 같이 세 변의 길이가 a, b, c 인 $\triangle \mathrm{ABC}$에서 $a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)=0$이 성립할 때, $\triangle \mathrm{ABC}$는 어떤 삼각형인가?



① $a=b$인 이등변삼각형 ② $a=c$인 이등변삼각형

③ $\angle \mathrm{A}=90°$인 직각삼각형 ④ $\angle \mathrm{B}=90°$인 직각삼각형

⑤ $\angle \mathrm{C}=90°$인 직각삼각형

해설

$a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)$
$=a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2+b^2c+bc^2-c^2a-ca^2$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^3+b^2c+bc^2+c^3$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^2(b+c)+c^2(b+c)$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+(b+c)(b^2+c^2)$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)(a-b-c)$
$=(a-b-c)a^2-(b^2+c^2)(a-b-c)$
$=(a-b-c)(a^2-b^2-c^2)$
$=0$
이 때, a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a \neq b+c$
$\therefore\ a^2-b^2-c^2=0$,
즉 $a^2=b^2+c^2$
따라서, $\triangle \mathrm{ABC}$는 a를 빗변으로 하는 직각삼각형,
즉 $\angle \mathrm{A}=90°$인 직각삼각형이다.

11. $\dfrac{2^{40}-2^{35}-2^{5}+1}{2^{35}-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 31

해설

$2^5 = x$라 두면

$$\begin{aligned}\frac{2^{40}-2^{35}-2^{5}+1}{2^{35}-1} &= \frac{x^8-x^7-x+1}{x^7-1} \\ &= \frac{(x-1)(x^7-1)}{x^7-1} \\ &= x-1 = 2^5-1 = 31\end{aligned}$$

12. 세 개의 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $[a,\ b,\ c] = (a-b)(a-c)$라 할 때, $[a,\ b,\ c] + [b,\ c,\ a] + [c,\ a,\ b] = 0$이면 $[a,\ b,\ c]$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$(a-b)(a-c) + (b-c)(b-a) + (c-a)(c-b) = 0$

전개하여 정리하면 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$

$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$

$\therefore\ a = b = c$

$\therefore\ [a,\ b,\ c] = (a-b)(a-c) = 0$

13. $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$를 인수분해 하면?

① $(a+b)(ab+bc+ca)$

② $(b+c)(ab+bc+ca)$

③ $(a+b)(a+b+c)$

④ $(a+b+c)(ab+bc+ca)$

⑤ $(b+c)(a+b+c)$

해설

$a+b+c=k$ 라 하면

(준식)$=(k-a)(k-b)(k-c)+abc$

$=k^3-(a+b+c)k^2+(ab+bc+ca)k-abc+abc$

$=k\left\{k^2-(a+b+c)k+(ab+bc+ca)\right\}$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)\ (\because a+b+c=k)$

14. $\dfrac{bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)}{bx+ay}+\dfrac{ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)}{bx+ay}$을 간단히 하면?

① $a^2x^2+b^2y^2$

② $(ax+by)^2$

③ $(bx+ay)^2$

④ $2(a^2x^2+b^2y^2)$

⑤ $(ax+by)(bx+ay)$

해설

(분자)$=bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)+ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)$

$=bx(a^2x^2+b^2y^2)+2a^2bxy^2+ay(a^2x^2+b^2y^2)+2ab^2x^2y$

$=(a^2x^2+b^2y^2)(bx+ay)+2abxy(ay+bx)$

$=(bx+ay)(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$=(bx+ay)(ax+by)^2$

따라서, (준 식)$=(ax+by)^2$

15. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b=-\sqrt{2}$, $b+c=\sqrt{2}$일 때, $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)$의 값은?

① 0 ② $\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ -2

해설

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)$

$=\{(a-b)+(b-c)+(c-a)\}$

$\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$-(a-b)(b-c)-(b-c)(c-a)-(c-a)(a-b)\}$

$=0$