**1.** $0 < a < b$인 실수, $a$, $b$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$　　② $\frac{a}{1+a} \le \frac{b}{1+b}$

③ $\frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$　　④ $\frac{a}{1+a} \ge \frac{b}{1+b}$

⑤ $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$

해설

$0 < a < b$에서 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \cdots$ ㉠

㉠의 양변에 1을 더하면

$\frac{1}{a} + 1 > \frac{1}{b} + 1$, $\frac{1+a}{a} > \frac{1+b}{b} \cdots$ ㉡

따라서 ㉡의 역수를 취하면 $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$

**2.** $-4 \le x \le a,\ 1 \le y \le 5$ 에서 $\frac{1}{2}x + 3y$ 의 최댓값이 16 일때, $a$는?

① $-2$　② $-1$　③ $0$　④ $1$　⑤ $2$

해설

$-4 \le x \le a$ 에서 $-2 \le \frac{1}{2}x \le \frac{a}{2} \cdots\cdots$ ㉠

$1 \le y \le 5$ 이므로 $3 \le 3y \le 15 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면 $1 \le \frac{1}{2}x + 3y \le \frac{a}{2} + 15$

따라서 최댓값이 16 이므로 $a = 2$

**3.** 부등식 $3x+2 \geq 8$을 풀면?

① $x \geq -2$ ② $x \geq -1$ ③ $x \geq -\frac{1}{2}$
④ $x \geq \frac{3}{2}$ ⑤ $x \geq 2$

해설
$3x+2 \geq 8,\ 3x \geq 6\ \therefore x \geq 2$

**4.** 부등식 $ax+1 \geq 2x+5$의 해가 $x \geq 2$일 때, 상수 $a$의 값은?

① $-3$ ② $-1$ ③ $1$ ④ $4$ ⑤ $7$

해설

$ax+1 \geq 2x+5$에서 $(a-2)x \geq 4$ 의 부등식의 해가 $x \geq 2$이므로
$a-2>0$
$x \geq \dfrac{4}{a-2}$ 이므로 $\dfrac{4}{a-2}=2,\ a-2=2$
$\therefore a=4$

**5.** 부등식 $|x-1|<2$을 풀면?

① $-1<x<0$
② $-1<x<3$
③ $1<x<3$
④ $x<-1$ 또는 $x>3$
⑤ $\frac{1}{2}<x<1$

해설

$|x-1|<2$에서 $-2<x-1<2$
$\therefore -1<x<3$

**6.** 부등식 $|2x-1| \geq 3$을 풀면?

① $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$
② $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$
③ $x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$
④ $x < 1$ 또는 $x > 2$
⑤ $x \leq 1$ 또는 $x > 2$

해설

$|2x-1| \geq 3$에서

$2x-1 \leq -3$ 또는 $2x-1 \geq 3$ 정리하면 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$

**7.** 이차부등식 $x^2-2x-8<0$의 해가 $a<x<b$일 때, $b-a$의 값은?

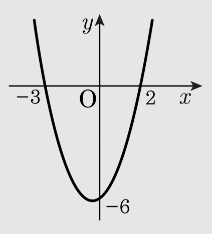
① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설
$x^2-2x-8<0$ 에서 $(x-4)(x+2)<0$
$\therefore -2<x<4$
$b-a=6$

**8.** 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식 $x^2+x-6>0$을 풀면?

① $x<-3$ 또는 $x>2$　② $x<-2$ 또는 $x>3$
③ $x<-1$ 또는 $x>4$　④ $x<0$ 또는 $x>5$
⑤ $x<1$ 또는 $x>6$

해설




이차방정식 $x^2+x-6=0$ 에서 $(x+3)(x-2)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$
$f(x)=x^2+x-6$ 으로 놓으면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
이차부등식 $f(x)>0$의 해는 $x<-3$ 또는 $x>2$

**9.** 부등식 $|2x-a|>7$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$일 때, 상수 $a$, $b$의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 11

해설

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7$ 또는 $2x-a>7$

$\therefore x<\dfrac{a-7}{2}$ 또는 $x>\dfrac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x<-1$ 또는 $x>b$이므로

$\dfrac{a-7}{2}=-1$, $\dfrac{a+7}{2}=b$

$\therefore a=5$, $b=6$

$\therefore a+b=11$

**10.** 모든 실수 $x$, $y$에 대하여 $x^2+pxy+qy^2 \geq 0$이 항상 성립하려면 다음 중 어떤 조건을 만족해야 하는가?

① $p<q$ ② $p^2 \leq q$ ③ $p \leq q^2$
④ $p^2 \leq 4q$ ⑤ $p^2 \geq 4q^2$

해설

모든 실수 $x$, $y$에 대하여 $x^2+pxy+qy^2 \geq 0$이 항상 성립하려면 $x$에 대한 이차방정식 $x^2+pxy+qy^2=0$의 판별식을 $D$라 할 때
$D=(py)^2-4qy^2 \leq 0$
$(p^2-4q)y^2 \leq 0 \cdots$ ㉠
㉠이 모든 실수 $y$에 대하여 성립하려면
$p^2-4q \leq 0$이어야 한다.
$\therefore p^2 \leq 4q$

**11.** 다음 중 옳지 않은 것은?

① $a > b, c > d$ 이면 $a + c > b + d$ 이다.
② $a > b,\ c > 0$ 이면 $ac > bc,\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ 이다.
③ $a > b > 0$ 이면 $a^2 > b^2$ 이다.
④ $a > b,\ c > d$ 이면 $ac > bd$ 이다.
⑤ $a > b,\ c < 0$ 이면 $ac < bc,\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ 이다.

해설

④ $a > b,\ c > d$ 이면 $ac > bd$
반례 : $a,\ b,\ c,\ d$ 가 음수인 경우는 $ac < bd$

**12.** $(a+b)x+(2a-3b)<0$의 해가 $x<-\frac{1}{3}$일 때, 부등식 $(a-3b)x+(b-2a)>0$을 풀어라.

▶ 답:

▷ 정답: $x<-3$

해설

$(a+b)x+(2a-3b)<0$

$(a+b)x<3b-2a$

$\Rightarrow \quad x<\frac{3b-2a}{a+b}=-\frac{1}{3}\ (a+b>0)$

$\Rightarrow \quad a+b=-3(3b-2a)$

$\Rightarrow \quad a=2b, \quad a+b=3b>0 \rightarrow \ b>0$

$(a-3b)x+(b-2a)>0 \ \Leftrightarrow \ -bx-3b>0$

$bx<-3b$

$\therefore \quad x<-3\ (\because\ b>0)$

**13.** 부등식 $|2x-1| < 8-x$를 만족하는 정수 $x$의 개수는?

① 7개 ② 8개 ③ 9개 ④ 10개 ⑤ 11개

해설

(ⅰ) $8-x > 0 \quad \therefore x < 8$

(ⅱ) $|2x-1| < 8-x$에서 $-8+x < 2x-1 < 8-x$

$-8+x < 2x-1$에서 $-x < 7,\ x > -7$

$2x-1 < 8-x$에서 $3x < 9,\ x < 3$

$\therefore -7 < x < 3$

**14.** 다음 부등식을 풀어라.

$$|x-1| > |x-2|$$

▶ 답:

▷ 정답: $x > \frac{3}{2}$

해설

i) $x < 1$일 때,
$-(x-1) > -(x-2)$에서 $1 > 2$이므로 모순

ii) $1 \le x < 2$일 때,
$(x-1) > -(x-2)$에서
$2x > 3$, $x > \frac{3}{2}$
조건에서 $1 \le x < 2$이므로 $\frac{3}{2} < x < 2 \cdots$ ㉠

iii) $x \ge 2$일 때, $(x-1) > (x-2)$에서 $1 < 2$이므로 성립
$\therefore x \ge 2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $x > \frac{3}{2}$

**15.** 부등식 $(a-b)x+(b-2a)>0$의 해가 $x>\frac{3}{2}$일 때, 부등식 $ax^2+(a+2b)x+(a+3b)<0$의 해를 구하면?

① $3<x<7$　② $-3<x<1$　③ $x<2,\ x>3$
④ $-1<x<2$　⑤ $x<-2,\ x>4$

해설

$(a-b)x>2a-b$의 해가 $x>\frac{3}{2}$이려면
$a-b>0,\ \frac{2a-b}{a-b}=\frac{3}{2}$이어야 한다.
$\therefore\ a=-b,\ \ b<0$
준 부등식 $-bx^2+bx+2b<0$에서
$x^2-x-2<0,\ (x-2)(x+1)<0$
$\therefore\ -1<x<2$

**16.** 임의의 실수 $x$에 대하여 $x^2+2ax+2a+3 \geq 0$이 성립하기 위한 상수 $a$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-1$

해설

$x^2+2ax+2a+3 \geq 0$이 항상 성립할 조건은
$D/4 = a^2-2a-3 = (a+1)(a-3) \leq 0$
$\therefore -1 \leq a \leq 3$
$a$의 최솟값은 $-1$

**17.** 모든 실수 $x$에 대하여 $(a^2-1)x^2-(a-1)x+1>0$이 성립할 때 $a$의 범위를 구하면?

① $a<-\frac{2}{3},\ a\geq 1$　② $-1<a<1$　③ $a<-1,\ a>1$
④ $a<-\frac{5}{3},\ a\geq 1$　⑤ $-\frac{5}{3}<\ a<1$

해설

(1) $a=1$일 때
(좌변)$=1>0$이므로 항상 성립한다.
(2) $a\neq 1$일 때
주어진 식이 성립하려면
$a^2-1>0,\ D<0$이어야 한다.
따라서 $a^2-1>0$에서 $(a-1)(a+1)>0$
$\therefore\ a<-1,\ a>1$
또 $D=(a-1)^2-4(a^2-1)<0$에서
$3a^2+2a-5>0,\ (3a+5)(a-1)>0$
$\therefore\ a<-\frac{5}{3},\ a>1$
(1), (2)에서 $a<-\frac{5}{3},\ a\geq 1$

**18.** $x$에 관한 이차부등식 $x^2 + ax + 2a - 3 > 0$이 모든 실수 $x$에 대하여 성립하도록 상수 $a$의 범위를 구하면 $p < a < q$이다. 이 때, $pq$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $pq = 12$

해설

$x^2 + ax + 2a - 3 > 0$이 항상 성립할 조건은
판별식 이 $D < 0$을 만족해야 한다.
$D = a^2 - 4(2a - 3) < 0$
$a^2 - 8a + 12 < 0$
$(a - 6)(a - 2) < 0$
$2 < a < 6 \quad \therefore p = 2, q = 6$
$\therefore\ pq = 2 \times 6 = 12$

**19.** 다음 중 부등식 $x^2-4ax+a^2-2a+1<0$ 의 해가 존재하지 않기 위한 $a$ 의 범위는? (단, $a$ 는 실수)

① $-3 \le a \le 1$ ② $-1 \le a \le \frac{1}{3}$ ③ $-3 < a < 1$
④ $-1 < a < \frac{1}{3}$ ⑤ $-1 \le a \le 1$

해설

$x^2-4ax+a^2-2a+1<0$ 의 해가 존재하지 않을 조건은
방정식 $x^2-4ax+a^2-2a+1=0$ 의 판별식 $D \le 0$ 이다.

$\therefore \frac{D}{4}=4a^2-(a^2-2a+1) \le 0$

$(3a-1)(a+1) \le 0$

$\therefore -1 \le a \le \frac{1}{3}$

**20.** 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2일 때, 방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

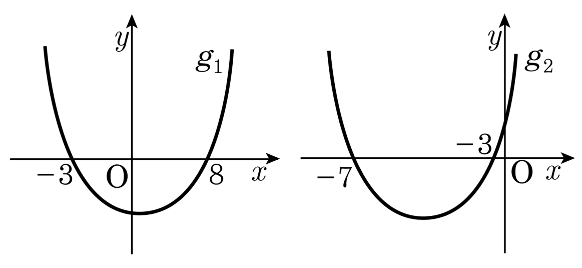
$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 $\alpha+\beta=2$

$f(2x-3)=0$에서 $2x-3=\alpha$, $2x-3=\beta$

$\therefore\ x=\dfrac{\alpha+3}{2},\ \dfrac{\beta+3}{2}$

$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{(\alpha+\beta)+6}{2}=4$

**21.** 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 $g_1$ 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 $g_2$ 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 $x$ 의 개수를 구하여라.




▶ 답 : 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
$g_1$ 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
$g_2$ 의 일차항 $a = 10$
($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\dfrac{a}{2} = -5$ )
이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 $a, b$ 를 대입하면
$x^2 + 10x - 24 < 0$, $(x + 12)(x - 2) < 0$
$\therefore -12 < x < 2$
따라서 만족하는 정수는 13 (개)

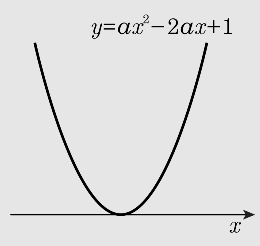
**22.** 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \leq 0$이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 $a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면
$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.




( i ) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$
( ii ) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 $D$ 라 하면
$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $a = 1$
( i ), ( ii ) 에서 $a = 1$

**23.** 이차함수 $y = -x^2 + (a-1)x + 3a$ 의 그래프가 직선 $y = x - 2$ 보다 항상 아래쪽에 있기 위한 실수 $a$ 값의 범위는?

① $-3 < a < 1$　　② $-6 < a < -2$　　③ $a \geq 3$ , $a \leq -1$

④ $a \geq 0$　　⑤ $a \leq 5$

해설

$x - 2 > -x^2 + (a-1)x + 3a$

$\Rightarrow x^2 - (a-2)x - 2 - 3a > 0$

항상 성립하려면, 판별식이 0 보다 작아야 한다.

$\Rightarrow D = (a-2)^2 - 4(-2-3a) < 0$

$\Rightarrow a^2 + 8a + 12 < 0$

$\Rightarrow -6 < a < -2$

**24.** 부등식 $a(x^2-2x+1)>2(x^2-2x-2)$를 만족하는 실수 $x$가 존재할 때, 상수 $a$의 범위는?

① $a>2$　　② $a\geq 2$　　③ $a<2$

④ $a$는 모든 실수　　⑤ $a<\pm 2$

해설

$a=2$일 때, $6>0$이므로 $x$는 모든 실수

$a\neq 2$일 때,

$(a-2)x^2-2(a-2)x+a+4=0\cdots$ ㉠에서

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a-2)(a+4)=-6(a-2)$이므로

i) $a>2$이면, $x$는 모든 실수

ii) $a<2$이면, $\frac{D}{4}>0$이므로 ㉠의 근을

$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$라 하면

부등식의 해는 $\alpha<x<\beta$이므로 $x$값이 존재한다.

$\therefore$ $a$는 모든 실수

**25.** 부등식 $|x^2-1|+3x<3$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, 상수 $\alpha+\beta$의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3$

해설

절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x$의 값을 경계로 하여 구간을 나누어 본다.
(ⅰ) $x^2-1\geq 0$,
즉 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$일 때,
$|x^2-1|=x^2-1$이므로 주어진 부등식은
$x^2-1+3x<3,\ x^2+3x-4<0$
$(x+4)(x-1)<0$
$\therefore -4<x<1$

이 때 조건에서 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$이므로
이를 만족하는 $x$값의 범위는 $-4\leq x\leq -1$
(ⅱ) $x^2-1<0$,
즉 $-1<x<1$일 때,
$|x^2-1|=-x^2+1$이므로 주어진 부등식은
$-x^2+1+3x<3,\ x^2-3x+2>0$
$(x-1)(x-2)>0$
$\therefore x<1$ 또는 $x>2$

이 때 조건에서 $-1<x<1$이므로
이를 만족하는 $x$의 값의 범위는 $-1<x<1$
(ⅰ), (ⅱ)로부터 주어진 부등식의 해는 $-4<x<1$
따라서 $\alpha=-4,\ \beta=1,\ \alpha+\beta=-3$

**26.** 이차부등식 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$ 의 해가 $|x| < |a|$ 과 일치하도록 실수 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, $a - b$ 의 값은 ?

① $-1$ ② $-2$ ③ $0$ ④ $2$ ⑤ $1$

해설

$|x| < |a| \iff x^2 < a^2 \iff x^2 - a^2 < 0 \cdots$ ①

$\iff ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0 \cdots$ ②

$\therefore a < 0,\ a^2 - 1 = 0$

$\therefore a = -1$

$a = -1$ 일 때 ①은 $x^2 - 1 < 0$, ②는 $-x^2 + b > 0$

$\therefore b = 1 \therefore a - b = -2$

**27.** 어느 회사가 판매하고 있는 상품의 1개당 판매 가격을 작년보다 $x$% 올리면 이 상품의 판매량이 작년보다 $\frac{x}{2}$% 감소한다고 한다. 이 회사가 올해 판매 금액의 10%를 상여금으로 지급할 때, 올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액이 작년 판매 금액보다 크거나 같게 되기 위한 $x$의 최댓값은?

① 60 ② $\frac{200}{3}$ ③ $\frac{230}{3}$ ④ 80 ⑤ 90

해설

이 회사가 판매하는 상품의 작년 1개당
판매 가격을 $a$, 판매량을 $b$라 하자.
올해 판매 가격을 $x$% 올리면
올해 판매 가격은 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$,
판매량은 $b\left(1-\frac{x}{200}\right)$이므로
올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액은
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\times\frac{9}{10}$
작년 판매 금액이 $ab$이므로
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\times\frac{9}{10}\geq ab$
이 부등식을 정리하면
$9x^2-900x+20000\leq 0$
$(3x-100)(3x-200)\leq 0$
$\therefore \frac{100}{3}\leq x\leq\frac{200}{3}$

**28.** $-1 \le x \le 1$ 에서 $x$ 에 대한 부등식 $x+a \le x^2 \le 2x+b$ 가 항상 성립할 때, $b-a$ 의 최솟값을 $p$ 라 하자. 이 때, $100p$ 의 값은?

① 275 ② 310 ③ 325 ④ 330 ⑤ 335

해설

$x+a \le x^2 \le 2x+b \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \ge a \\ x^2 - 2x \le b \end{cases}$

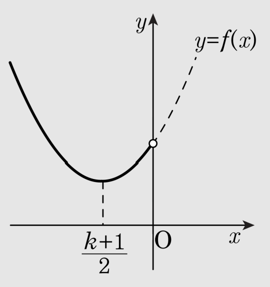
( i ) $f(x) = x^2 - x$ 라 하면

$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

$-1 \le x \le 1$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-\frac{1}{4} \le f(x) \le 2$

즉, $-\frac{1}{4} \le x^2 - x \le 2$ 이므로 $a \le -\frac{1}{4}$



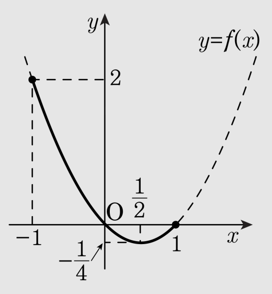

( ii ) $g(x) = x^2 - 2x$ 라 하면

$g(x) = (x-1)^2 - 1$

$-1 \le x \le 1$ 에서 $y = g(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-1 \le g(x) \le 3$

즉, $-1 \le x^2 - 2x \le 3$ 이므로 $b \ge 3$




( i ), ( ii ) 에서 $b-a$ 의 최솟값 $p$ 는

$p = 3 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{4}$

$\therefore\ 100p = 325$

**29.** $x$, $y$, $z$는 실수이고, 두 관계식 $x+y+z=2, 2x^2-yz=4$를 만족시킨다. 이 때 $xy+yz+zx$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-5$

해설

$y+z=2-x,\ \ yz=2x^2-4$에서

$y, z$를 두근으로 하는 이차방정식은

$t^2-(2-x)t+2x^2-4=0$이므로

$D=(2-x)^2-4(2x^2-4)\geq 0$

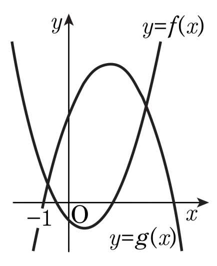
$\therefore\ -2\leq x\leq \dfrac{10}{7}$

따라서 $xy+yz+zx=yz+(y+z)x$

$=(2x^2-4)+(2-x)x$

$=(x+1)^2-5$에서 $x=-1$일 때 최솟값 $-5$

**30.** 이차항의 계수가 각각 1, $-1$인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음의 그림과 같다. 부등식 $f(x)-g(x) \le 0$의 해가 $-1 \le x \le 3$이고 $f(2)=1$일 때, $g(1)$의 값은?




① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y=f(x)$의 $y$절편이 $-1$이므로 $f(x)=x^2+ax-1$로 놓을 수 있다.
$f(2)=2a+3=1$에서 $a=-1$
$\therefore f(x)=x^2-x-1$
$g(x)=-x^2+bx+c$로 놓으면 $f(x)-g(x) \le 0$의 해가 $-1 \le x \le 3$이므로
$f(x)-g(x)=2x^2-(1+b)x-1-c=2(x+1)(x-3)=2x^2-4x-6$
따라서, $1+b=4$, $-1-c=-6$에서
$b=3$, $c=5$
$\therefore g(x)=-x^2+3x+5$
$\therefore g(1)=7$