1. 연립방정식 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha$,$y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$\begin{cases} y = x + 1 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2 + (x+1)^2 = 5$, $2x^2 + 2x - 4 = 0$,

$2(x+2)(x-1) = 0$

$\therefore\ x = 1,\ -2$

$x = 1$일 때, $y = 2$,

$x = -2$일 때, $y = -1$

$\therefore\ \alpha = 1, \beta = 2$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = -1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$

2. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x=y+1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2+y^2=5$

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$

$\therefore\ xy=2$

3. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+2y^2=12 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2-3xy+2y^2=0$에서

$(x-y)(x-2y)=0 \quad \therefore x=y$ 또는 $x=2y$

i) $x=y$ 일 때

$x^2+2y^2=3x^2=12$

$x=\pm 2,\ y=\pm 2$

ii) $x=2y$일 때

$x^2+2y^2=6y^2=12$

$y=\pm\sqrt{2},\quad x=\pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x+y=4,-4,3\sqrt{2},-3\sqrt{2}$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+2xy+y^2=1 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$y=x-3$을 이차식에 대입하면
$x^2+2x(x-3)+(x-3)^2=1$
$x^2-3x+2=0$
$\therefore\ x=1, 2$
(i) $x=1$일 때 $y=-2$
(ii) $x=2$일 때 $y=-1$
따라서 $xy=-2$

5. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ 5x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$ 의 근을 $x = \alpha,\ y = \beta$라 할 때, $\alpha + \beta$의 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \cdots ① \\ 5x^2 - y^2 = 4 \quad \cdots ② \end{cases}$

①식 인수분해 : $(2x - y)(x - y) = 0$

$\therefore\ y = 2x, y = x$

②식에 대입하면

$y = 2x \rightarrow 5x^2 - (2x)^2 = 4,$

$x^2 = 4,\ x = \pm 2, y = \pm 4$

$y = x \rightarrow 5x^2 - x^2 = 4,\ 4x^2 = 4$

$x^2 = 1,\ x = \pm 1, y = \pm 1$

$x = \alpha, y = \beta$에서

$\alpha + \beta$: $2 + 4 = 6,\ -2 - 4 = -6$

$1 + 1 = 2\ ,\ -1 - 1 = -2$

$\therefore \alpha + \beta$의 최댓값은 6

6. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 를 만족하는 실수 해의 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 1 개

해설

$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 & \cdots ㉠ \\ (x-y)^2 + y^2 = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2 - (y-3)^2 = 0$

$(x+y-3)(x-y+3) = 0$

$y = x+3$ 또는 $y = -x+3$

i) $y = -x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$\therefore\ x = 2$이 때, $y = 1$

ii) $y = x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 + 2x + 4 = 0$

$\therefore\ x = -1 \pm \sqrt{3}i$

이 때, $y = 2 \pm \sqrt{3}i$

i), ii) 에서 실수해의 순서쌍은 $(2,\ 1)$ 이다.

따라서 실수해의 순서쌍의 개수는 1 개 이다.

7. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$

① $x=2\sqrt{5},\ y=-\sqrt{5}$ ② $x=-2\sqrt{5},\ y=\sqrt{5}$

③ $x=\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\ y=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ ④ $x=-\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\ y=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

⑤ $x=-\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\ y=-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

$x^2+xy-2y^2=0$

$\Rightarrow \quad (x-y)(x+2y)=0$

i) $x=y$ $x^2+y^2=2y^2=25$

$y=\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\ x=\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

ii) $x=-2y$

$x^2+y^2=5y^2=25$

$y^2=5$ $y=\pm\sqrt{5},\ x=\mp2\sqrt{5}$

$\therefore$ 해: $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(-\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

$(-2\sqrt{5},\ \sqrt{5}),\ (2\sqrt{5},\ -\sqrt{5})$

8. $x=\alpha,\ y=\beta$가 연립방정식

$$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=-2 \\ 2x^2-3xy-2y^2=-3 \end{cases}$$ 의 해일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=-2 & \cdots ① \\ 2x^2-3xy-2y^2=-3 & \cdots ② \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ① × 3 − ② × 2하면

$x^2-3xy+2y^2=0,\ (x-2y)(x-y)=0,$

$x=2y\ or\ x=y$

$x=2y$를 ① 식에 대입하면

$4y^2-2y^2-2y^2=-2,\ 0=-2$불능

$x=y$를 ①식에 대입하면

$y^2-y^2-2y^2=-2$

$y^2=1,\ y\pm 1,\ x\pm 1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=1+1=2$

9. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{cases}$$

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2-2v=25 \\ v=12 \end{cases}$$

$\therefore\ u=\pm 7,\ v=12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x+y=7 & \cdots ㉠ \\ xy=12 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

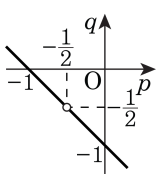
또는 $\begin{cases} x+y=-7 & \cdots ㉢ \\ xy=12 & \cdots ㉡ \end{cases}$

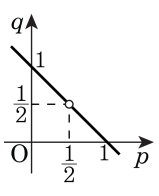
(i) ㉠, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2-7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=3,\ y=4$ 또는 $x=4,\ y=3$

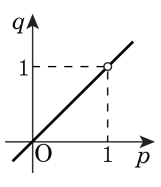
(ii) ㉢, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2+7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=-3,\ y=-4$ 또는 $x=-4,\ y=-3$

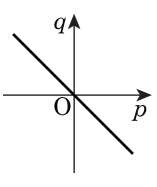
(i), (ii)로부터 구하는 모든 해의 합은 0

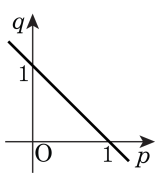
10. x에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2-px-q=0$, $x^2-qx-p=0$이 오직 하나의 공통근을 갖는다. 이 때, p, q의 관계를 나타낸 그래프는?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$$\begin{cases} x^2-px-q=0 & \cdots ① \\ x^2-qx-p=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①−②에서 $(-p+q)x-(-p+q)=0$

$\therefore\ (-p+q)(x-1)=0$

여기서 $-p+q=0$이면 즉 $q=p$이면

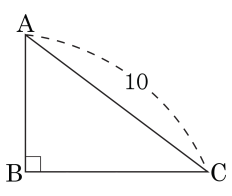
①, ②가 같게 되어 주어진 문제의 조건에 모순이다.

$\therefore\ x=1$이다.

이 때 ①에서 $1-p-q=0$

따라서 구하는 식은 $q=-p+1$(단, $p\neq q$)

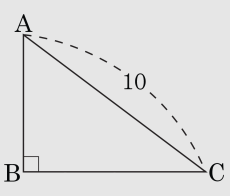
11. 다음 그림의 직각삼각형 ABC 에서 둘레의 길이가 24 이고, 빗변의 길이가 10 이다. 이때, 두 선분 AB 와 BC 의 길이의 곱을 구하면?



① 48 ② 40 ③ 32

④ 18 ⑤ 12

해설



$\overline{AB} = a, \overline{BC} = b$

둘레의 길이가 24 이므로

$24 = a + b + 10$

$a + b = 14$

직각삼각형이므로,

$a^2 + b^2 = 10^2$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$ab = \frac{1}{2}\{(a+b)^2 - (a^2+b^2)\}$

$= \frac{1}{2}\{14^2 - 10^2\} = \frac{1}{2} \cdot 96 = 48$

12. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=k \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 의 해가 오직 한 쌍이기 위한 실수 k 의 값은 k_1, k_2 의 두 개다. 이 때, k_1k_2 의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$\begin{cases} x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+k$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+2(-x+k)^2=4$

$3x^2-4kx+2k^2-4=0 \quad \cdots ㉢$

이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-3(2k^2-4)=0$

$4k^2-6k^2+12=0,\ k^2=6$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{6}$

$\therefore\ k_1k_2=\sqrt{6}\times(-\sqrt{6})=-6$

13. 다음 방정식을 만족하는 실수 $x,\ y$의 합을 구하여라.

$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: -3

▷ 정답: 3

해설

$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$에서 $x^2y^2+4x^2+y^2+4-8xy=0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면
$(x^2y^2-4xy+4)+(4x^24xy+y^2)=0$
이 때, $x,\ y$가 실수이므로 $xy-2,\ 2x-y$도 실수이다.
$\therefore xy-2=0 \quad \cdots$㉠,
$2x-y=0 \quad \cdots$㉡
㉡에서 $y=2x$이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2=1$
따라서, $x=1$일 때 $y=2$, $x=-1$일 때 $y=-2$
그러므로 $x,\ y$의 값은 $x=\pm1,\ y=\pm2$(복부호 동순)
따라서 $x,\ y$의 합은 $-3, 3$

14. $x^2+y^2-2y+1=0$을 만족하는 실수 x, y의 합 $x+y$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^2+y^2-2y+1=0$에서 $x^2+(y-1)^2=0$

x, y는 실수이므로 $x^2\geq 0$, $(y-1)^2\geq 0$

따라서, $x=0$, $y-1=0$이므로 $x=0$, $y=1$

$\therefore\ x+y=0+1=1$

15. 방정식 $xy+2x=3y+10$을 만족하는 양의 정수가 $x=\alpha,\ y=\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

주어진 식을 변형하면
$xy+2x-3y=10,\ xy+2x-3y-6=4,$
$(x-3)(y+2)=4$
$y+2\geq 3$이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는
$x-3=1,\ y+2=4$
$\therefore\ x=4,\ y=2$

16. 방정식 $2x + 5y = 84$를 만족하는 양의 정수 x, y의 해 중에서 x의 최댓값을 구하면?

① 36 ② 37 ③ 38 ④ 39 ⑤ 40

해설

준식을 y에 대하여 정리하면

$$y = \frac{84 - 2x}{5} = \frac{2(42 - x)}{5} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 y가 양의 정수이므로 $42 - x$가 5의 배수이다.

따라서, $x = 2,\ 7,\ \cdots,\ 37$

$\therefore$ x의 최댓값은 37

17. $xy-3x-3y+4=0$을 만족하는 양의 정수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$xy-3x-3y+4=0$에서
$x(y-3)-3(y-3)-5=0,\ (x-3)y-3=5$
$x\geq 1,\ y\geq 1$이므로 $x-3\geq -2,\ y-3\geq -2$
(i) $x-3=1,\ y-3=5$일 때, $x=4.\ y=8$
(ii) $x-3=5,\ y-3=1$일 때, $x=8,\ y=4$
따라서, 구하는 값은 $x+y=4+8=8+4=12$

18. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30 개 이고 배점은 80 점 이다. 문항별 배점은 2 점, 3 점, 4 점 의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2 점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

2 점 문항 개수를 x, 3 점 문항을 y,
4 점 문항을 z 라 하자
$2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots$ ㉠
$x + y + z = 30 \quad \cdots$ ㉡
㉠$-4\times$㉡ $\Rightarrow \quad y = 40 - 2x$
㉠$-3\times$㉡ $\Rightarrow \quad z = x - 10$
$\therefore \quad x = 10$ 이면 $z = 0$
$\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음
$\therefore \quad x \geq 11$, 최소 11 문항

19. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy-2y^2=8 \cdots\cdots ㉠ \\ xy+3y^2=1 \quad \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 근 x, y를 구할 때, $x+y$의 값을 모두 구하면?

① $-\frac{7}{2}, -1, 1, \frac{7}{2}$ ② $-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}$ ③ $-1, 1$
④ $-\frac{7}{2}, 1$ ⑤ $1, \frac{7}{2}$

해설

㉠ − ㉡ × 8에서 $x^2-11xy-26y^2=0$, $(x+2y)(x-13y)=0$
$x+2y=0 \cdots\cdots ㉢$
$x-13y=0 \cdots\cdots ㉣$
㉡, ㉢에서 $y^2=1$
$\therefore\ y=\pm1,\ x=\mp2$(복호동순)
㉡, ㉣에서 $16y^2=1$
$\therefore\ y=\pm\frac{1}{4},\ x=\pm\frac{13}{4}$(복호동순)
$\therefore\ x+y=-1,\ 1,\ \frac{7}{2},\ -\frac{7}{2}$

20. $x^2+ax+b=0,\ x^2+bx+a=0$이 단 한 개의 공통근을 가진다. $-1\le a\le 0$일 때 a^2+b^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하면?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

공통근을 α라 하면

$\alpha^2+a\alpha+b=0\cdots①$

$\alpha^2+b\alpha+a=0\cdots②$

① − ② : $(a-b)(\alpha-1)=0$에서

$a\neq b$이므로 $\alpha=1$

$1+a+b=0$에서 $b=-a-1$

$a^2+b^2=a^2+(-a-1)^2=2a^2+2a+1$

$=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

$-1\le a\le 0$이므로 $M=1,\ m=\frac{1}{2}$

21. x에 대한 두 이차방정식 $x^2+ax+b=0$, $x^2+bx+a=0$이 한 개의 공통근 α를 가지고, 공통이 아닌 두 근의 비가 $3:5$일 때, $a-b$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ 0

해설

공통근이 α이므로 $\alpha^2+a\alpha+b=0\cdots$㉠
$\alpha^2+b\alpha+a=0\cdots$㉡
㉠–㉡에서 $(a-b)(\alpha-1)=0$
$a=b$이면 모순이므로 $a\neq b$ $\therefore\ \alpha=1$
$x^2+ax+b=0$, $x^2+bx+a=0$의 공통이 아닌 근을 각각 β, γ라 하면 근과 계수와의 관계에 의하여 $1\cdot\beta=b$, $1\cdot\gamma=a$
따라서, 공통이 아닌 두 근의 비는
$\beta:\gamma=b:a=3:5\cdots$㉢
한편, ㉠에 $\alpha=1$을 대입하면 $a+b+1=0\cdots$㉣
㉢, ㉣에서 $a=-\frac{5}{8}$, $b=-\frac{3}{8}$
$\therefore\ a-b=-\frac{1}{4}$

22. 2 년 전의 A 와 B 의 임금은 서로 같았으나 그 해 A 의 임금은 8% 인상되었고, 작년에는 다시 47% 인상되었다. 반면 B의 임금은 2 년 전과 작년의 임금 인상률이 모두 a% 로 일정했다. 두 사람의 올해 임금이 서로 같을 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 26

해설

2 년 전 두 사람의 임금을 k 원이라면
올해 A 와 B 의 임금은 각각
A : $k(1+0.08)(1+0.47)$
B : $k\left(1+\frac{a}{100}\right)^2$
따라서
$(100+a)^2 = 108\times 147 = 3\times 3\times 6\times 6\times 7\times 7$
$\therefore\ 100+a = 126$
$\therefore a = 26$

23. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x+y=2 \\ y-z=a \end{cases}$ 가 실수해를 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 $\alpha \le a \le \beta$라고 할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x=2-y, z=y-a$ 이므로

$(2-y)^2+y^2+(y-a)^2=3$

즉, $3y^2-2(a+2)y+a^2+1=0$

$D/4=(a+2)^2-3(a^2+1)=-2a^2+4a+1\ge 0$

$2a^2-4a-1\le 0$

$\therefore \dfrac{2-\sqrt{6}}{2} \le a \le \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=2$

24. $\dfrac{x^2-y^2-1}{x-y}=6$을 만족시키는 자연수 $x,\ y$값의 순서쌍의 개수는?

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 2개

해설

$\dfrac{x^2-y^2-1}{x-y}=6$ 에서

$\dfrac{(x-y)(x+y)-1}{x-y}=(x+y)+\dfrac{-1}{x-y}=6$

$x-y$ 는 -1 의 약수이다. 즉 -1 또는 1

i) $x-y=1$ 일 때, $x+y=7$

$\therefore\ x=4,\ y=3$

ii) $x-y=-1$ 일 때, $x+y=5$

$\therefore\ x=2,\ y=3$

따라서 구하는 $(x,\ y)=(4,\ 3),\ (2,\ 3)$ 이므로

2 개이다.