1. 방정식 $(x-1)(x^2-x-2)=0$의 모든 근의 합을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(x-1)(x-2)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1,1,2$

$\therefore\ -1+1+2=2$

2. 다음 방정식을 만족하는 x, y의 값을 차례대로 구하여라.

$$2x - y = 4x + 10 = x + y - 5$$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x = -5$

▷ 정답: $y = 0$

해설

주어진 방정식은 다음의 연립방정식과 같다.

$$\begin{cases} 2x - y = 4x + 10 \\ 2x - y = x + y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y + 10 = 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x - 2y + 5 = 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $x = 2y - 5 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면 $2(2y - 5) + y + 10 = 0$

$\therefore \ y = 0$

$y = 0$을 ㉢에 대입하면 $x = -5$

$\therefore \ x = -5, \ y = 0$

3. 다음 연립방정식의 해를 $x=\alpha,\ y=\beta,\ z=\gamma$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 2x-3y+3z=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+y-2z=3 & \cdots\cdots ㉡ \\ x-2y+z=5 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

㉠ − ㉢ × 3 을 하면 $-x+3y=-5$ ······㉣
㉡ + ㉢ × 2 를 하면 $5x-3y=13$ ······㉤
㉣ + ㉤ 을 하면 $4x=8$ $\therefore\ x=2$
$x=2$ 를 ㉣에 대입하면 $-2+3y=-5$ $\therefore\ y=-1$
또, $x=2,\ y=-1$ 을 ㉢에 대입하면
$2-2\cdot(-1)+z=5$
$\therefore\ z=1$
$\therefore\ x=2,\ y=-1,\ z=1$
$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=4+1+1=6$

4. 연립방정식 $\begin{cases} px+y=1 \\ x+py=1 \end{cases}$ 의 해가 없을 때의 p값으로 알맞은 것은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ -2

해설

$ax+by=c,\ dx+ey=f$ 일때,

$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}\neq\frac{c}{f}$ 이면 해가 없음,

$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}$ 이면 해가 무수히 많다.

$p=\frac{1}{p}\neq 1$

$\therefore p=-1$

5. 다음 세 개의 3차방정식의 공통근을 구하여라.

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0,\ x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0,$$
$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

제 1식에서 $(x-1)(x+1)(x+3) = 0$

$\therefore \quad x = 1,\ -1,\ -3$

제 2식에서 $(x-1)(x+1)(x+2) = 0$

$\therefore \quad x = 1,\ -1,\ -2$

제 3식에서 $(x-1)^2(x-2) = 0$

$\therefore\ 1,\ 2$

$\therefore$ 공통근 : $x = 1$

6. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$의 모든 실근의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$에서
$x^2 = t$로 치환하면
$t^2 + 3t - 10 = 0$, $(t+5)(t-2) = 0$
$\therefore\ t = -5$ 또는 $t = 2$
$\therefore\ x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

7. 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=5 & \cdots\cdots㉠ \\ 2y+3z=-2 & \cdots\cdots㉡ \\ 3z+x=-5 & \cdots\cdots㉢ \end{cases}$ 를 풀면 $x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ 이다.
이때, $\alpha\beta\gamma$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설
주어진 세 식을 변변끼리 더하면
$2(x+2y+3z)=-2$,즉 $x+2y+3z=-1$ $\cdots\cdots㉣$
㉣ − ㉡을 하면 $x=1$
㉣ − ㉢을 하면 $y=2$
㉣ − ㉠을 하면 $z=-2$
$\therefore\ \alpha\beta\gamma=xyz=-4$

8. 방정식 $(x^2+x+2)^2+8=12(x^2+x)$ 의 모든 근의 합은?

① 1 ② 0 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$x^2+x=Y$ 라 하면, $(Y+2)^2+8=12Y$
$Y^2-8Y+12=0$, $(Y-2)(Y-6)=0$
$Y=2$ 또는 $Y=6$
(i) $Y=2$
$x^2+x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$ 또는 $x=1$
(ii) $Y=6$
$x^2+x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3$ 또는 $x=2$
$\therefore$ 모든 근의 합 $=-2$

9. 사차식 x^4-4x^2-12 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$
② $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+2i)(x-2i)$
③ $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$
④ $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2i)(x-2i)$
⑤ $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{6}i)(x-\sqrt{6}i)$

해설

$x^4-4x^2-12,\quad x^2=Y$ 라 하자
$\Rightarrow\quad Y^2-4Y-12=(Y+2)(Y-6)=0$
$Y=-2$ 또는 $Y=6$
$\Rightarrow\quad x^2=-2,\quad x^2=6$
$\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{2}i,\quad x=\pm\sqrt{6}$
$\therefore\ x^4-4x^2-12$
$=(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

10. 삼차방정식 $(x-1)(x^2-ax+2a)=0$이 중근을 가질 때, 실수 a의 값들의 합을 구하면?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 7 ⑤ 10

해설

$(x-1)(x^2-ax+2a)=0$에서

i) 1이 중근일 경우

$x^2-ax+2a=0$에 $x=1$을 대입하면 성립해야 하므로

$1-a+2a=0$, $a=-1$

ii) 1이 중근이 아닌 경우

$x^2-ax+2a=0$이 중근을 가지므로 판별식 $D=0$에서

$D=a^2-8a=0$, $a(a-8)=0$, $a=0,8$

$\therefore\ 0+8-1=7$

11. 삼차방정식 $x^3-3x^2+ax+b=0$ 의 한 근이 $1+i$ 일 때, 실수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

세 근을 $1+i, 1-i, \alpha$ 라 하자. 근과 계수와의 관계에 따라

합: $(1+i)+(1-i)+\alpha=3, \alpha=1 \cdots$ ㉠

곱: $(1+i)(1-i)\alpha=2\cdot(1)=-b, \quad b=-2\cdots$ ㉡

$a=(1+i)(1-i)+1(1-i)+1(1+i)=2+1-i+1+i=4$

$a+b=4-2=2$

12. 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+4=0$ 의 한 근이 $1+\sqrt{3}i$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$x^3+ax^2+bx+4=0$ 의 근 $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, \alpha$
세 근의 곱 : $\alpha(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=-4$
$\alpha(1+3)=-4$, $\alpha=-1$
세 근 : $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -1$
세 근의 합 : $1+\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i-1=-a$
$a=-1$
$b=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)+(-1)(1-\sqrt{3}i)$
$+(-1)(1+\sqrt{3}i)$
$=1+3-1+\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i=2$
$\therefore\ a+b=-1+2=1$

13. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\omega^2 + \omega + 1 = 0$　　② $\omega + \frac{1}{\omega} = -1$

③ $(1 + \omega^2)^2 = \omega$　　④ $(1 + \omega)^{10} = \omega^2$

⑤ $\omega^3 = 1$

해설

$x^3 = 1$

$(x^3 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

ω는 $x^2 + x + 1 = 0$의 한 근이다.

$\omega^3 = 1$, $\omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots$ ①

①식을 ω로 나누면

$\omega + \frac{1}{\omega} = -1$(○)

③ $(1 + \omega^2)^2 = (-\omega)^2 = \omega^2(\times)$

④ $(1 + \omega)^{10} = (-\omega^2)^{10}$

$= \omega^{20}$

$= (\omega^3)^6\omega^2$

$= \omega^2$ (○)

14. $x^3 = 1$의 한 허근이 ω일 때, $\omega^{10} + \omega^5 + 1$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$w^3 = 1$,
$x^3 - 1 = 0$
$\Rightarrow$ $(x-1)(x^2+x+1) = 0$의 한 허근이 ω
$\Rightarrow w^2 + w + 1 = 0$
$\omega^{10} + \omega^5 + 1 = (w^3)^3 w + w^2 \cdot w^3 + 1$
$= w^2 + w + 1$
$= 0$

15. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 1 cm줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : ________ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3)=\frac{5}{2}x^3$,

$x^3+4x^2+x-6=\frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3-4x^2-x+6=0$ 에서

$3x^3-8x^2-2x+12=0$을 풀면 $x=2(\text{cm})$

16. 사차방정식 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$의 서로 다른 실근은 모두 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2-4)(x^2-1) = 0 \Rightarrow (x+2)(x-2)(x+1)(x-1) = 0$

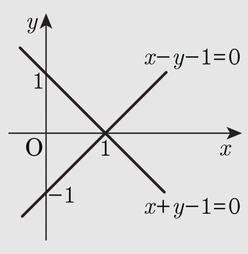
$\therefore\ x = 2$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = -1$

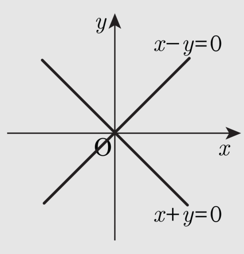
17. 좌표평면에서 두 영역 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$의 개수는?

① 무한히 많다. ② 0개 ③ 1개
④ 2개 ⑤ 4개

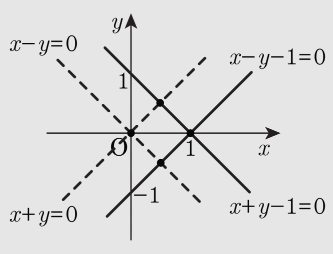
해설

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.





이것을 하나의 좌표평면에 그리면



위에서 점선과 실선의 교점의 개수는 2개이다.

18. 연립방정식 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+2z=3 \\ 2x+y-z=-1 \end{cases}$ 의 해를 $x=a, y=b, z=c$라 할 때, $(a+b)^2+c$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x+y+z=3 \quad \cdots$ ①
$x-y+2z=3 \quad \cdots$ ②
$2x+y-z=-1 \quad \cdots$ ③
① + ② : $2x+3z=6$
② + ③ : $3x+z=2$
연립하면, $x=0, \ z=2$
$\therefore y=1$
$\therefore (a+b)^2+c=3$

19. 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$2x-2y+z=3x-y+z=x+2y-4z+10=2$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=0$

▷ 정답 : $y=0$

▷ 정답 : $z=2$

해설

주어진 방정식을 변형하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} 2x-2y+z=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-y+z=2 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+2y-4z=-8 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

따라서 ㉡ − ㉠에서

$x+y=0$ ······㉣

㉠ × 4 + ㉢에서

$3x-2y=0$ ······㉤

㉣ × 2 + ㉤에서 $5x=0$

$\therefore x=0,\ y=0$

$x=0,\ y=0$을 ㉠에 대입하면 $z=2$

20. x, y에 관한 연립방정식 $\begin{cases} kx+y=-3 \\ 2x+(k-1)y=6 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때의 k의 값을 α, 해가 없을 때의 k의 값을 β라 하면, $\alpha+\beta$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

해가 무수히 많을 조건은 $\frac{k}{2}=\frac{1}{k-1}=\frac{-3}{6}$

해가 없을 조건은 $\frac{k}{2}=\frac{1}{k-1}\neq\frac{-3}{6}$

$\frac{k}{2}=\frac{1}{k-1}$ 에서 $k(k-1)=2$,

$k^2-k-2=0$

$\therefore\ k=-1,\ 2$

(i) $k=-1$일 때,

$\frac{-1}{2}=\frac{1}{-1-1}=\frac{-3}{6}$ 이므로 해가 무수히 많다.

(ii) $k=2$일 때,

$\frac{2}{2}=\frac{1}{2-1}\neq\frac{-3}{6}$ 이므로 해가 없다.

$\therefore\ \alpha=-1, \beta=2$

$\therefore\ \alpha+\beta=1$

21. 어떤 공장에서 A, B의 두 제품을 생산하고 있다. A제품의 생산량은 작년에 비하여 $20\,\%$ 증가하였고, B제품은 $25\,\%$ 증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B제품의 생산량을 구하면?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 40개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$이다.
$a+b=70$, $1.2a+1.25b=86$
연립하여 풀면, $a=30$, $b=40$

22. 200 m 운동장 트랙에서 두 명의 학생이 일정한 속력으로 달리기를 한다. 두 학생이 같은 방향으로 달리면 3분 후에 만나고, 반대 방향으로 달리면 1분 후에 만난다고 할 때, 두 학생 중 빠른 학생의 속력은?

① 8 km/h ② 9 km/h ③ 10 km/h
④ 11 km/h ⑤ 12 km/h

해설

빠른 학생의 분속 : x
3분간 간 거리 : $3x$
느린 학생의 분속 : y
3분간 간 거리 : $3y$
같은 방향으로 3분간 달려간 후 만났으므로
거리의 차는 200
$3x-3y=200$
반대방향으로 1분간 달려간 후 만났으므로
거리의 합은 200
$x+y=200$

$$\begin{cases} 3x-3y=200 \\ x+y=200 \end{cases}$$

연립방정식을 풀면 $x=\frac{400}{3}\text{m}/$분

$\Rightarrow \frac{400\text{m}}{3}/$분$=\frac{0.4\text{ km}}{3}\times 60/$시간$=8\text{ km/h}$

23. 방정식 $x^3 = 8$의 한 허근을 α라 하고, $z = \dfrac{2\alpha + 1}{\alpha + 2}$이라 할 때, $4z \cdot \overline{z}$의 값을 구하면? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수)

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 13

해설

$x^3 = 8$에서 $(x-2)(x^2+2x+4) = 0$
$x^2 + 2x + 4 = 0$의 한 허근을 α라 하면
다른 허근은 $\overline{\alpha}$이므로
$\alpha + \overline{\alpha} = -2,\ \alpha\overline{\alpha} = 4$

$$\begin{aligned} \therefore\ 4z\overline{z} &= 4 \times \frac{2\alpha+1}{\alpha+2} \times \frac{2\overline{\alpha}+1}{\overline{\alpha}+2} \\ &= 4 \times \frac{4\alpha\overline{\alpha} + 2(\alpha+\overline{\alpha}) + 1}{\alpha\overline{\alpha} + 2(\alpha+\overline{\alpha}) + 4} \\ &= 4 \times \frac{4 \times 4 + 2(-2) + 1}{4 + 2(-2) + 4} = 13 \end{aligned}$$

24. 다음 연립방정식을 풀 때, $xyz = \pm\frac{n}{m}$ 이다. $m+n$의 값을 구하여라.(단, m, n 은 서로소)

$x(x+y+z) = 12, \quad y(x+y+z) = 8, \quad z(x+y+z) = 16$

▶ 답 :

▷ 정답 : 73

해설

$x(x+y+z) = 12 \cdots$ ㉠
$y(x+y+z) = 8 \cdots$ ㉡
$z(x+y+z) = 16 \cdots$ ㉢
㉠ + ㉡ + ㉢ $= (x+y+z)^2 = 36$
$= x+y+z = \pm 6$
㉠, ㉡, ㉢에 대입하면
$\therefore\ x = \pm 2, y = \pm\frac{4}{3}, z = \pm\frac{8}{3} \Rightarrow xyz = \pm\frac{64}{9}$

$\therefore\ m+n = 64+9 = 73$

25. 사차방정식 $x^4+5x^3-4x^2+5x+1=0$의 두 실근의 합을 구하면?

① -5　　② -6　　③ 0　　④ 5　　⑤ 6

해설

짝수차 상반방정식이므로
양변을 x^2 으로 나누면
$x^2+5x-4+\frac{5}{x}+\frac{1^{2}}{x}=0,$
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$
$x+\frac{1}{x}=t$라 놓으면
$t^2+5t-6=0,\ (t+6)(t-1)=0$
$\therefore\ t=1,\ -6$
즉, $x+\frac{1}{x}=1,\ x+\frac{1}{x}=-6$
$\therefore\ x^2-x+1=0\cdots\cdots$ ㉠
$x^2+6x+1=0\cdots\cdots$ ㉡
㉠식은 허근을 가지므로 조건에 맞지 않고
㉡식에서 두 실근의 합은
근과 계수와의 관계에서
$\therefore\ \alpha+\beta=-6$