1. 다음 계산 중 <u>틀린</u> 것은?

① $5i\times(-2i)\times i^3=-10i$　　② $i^3+i^4+i^5+i^6=0$

③ $\sqrt{-8}\times\sqrt{-2}=4$　　④ $\sqrt{-2}+\sqrt{-8}=3\sqrt{2}i$

⑤ -16 의 제곱근은 $\pm4i$

해설

① $5i\times(-2i)\times i^3=-10i^5=-10(i^2)^2\times i=-10i$

② $i^3+i^4+i^5+i^6$

$=(i^2)\times i+(i^2)^2+(i^2)^2\times i+(i^2)^3$

$=-i+1+i-1$

$=0$

③ $\sqrt{-8}\times\sqrt{-2}=2\sqrt{2}i\times\sqrt{2}i=-4$

④ $\sqrt{-2}+\sqrt{-8}=\sqrt{2}i+2\sqrt{2}i=3\sqrt{2}i$

⑤ -16 의 제곱근은 $\pm\sqrt{-16}=\pm4i$

2. 허수단위 i에 대하여 $i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$을 간단히하면?

① $1+i$　② $-1+i$　③ $2i$

④ $2+i$　⑤ 2

해설

$$i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$$
$$=i+(-1)+(-i)+1+i+(-1)$$
$$=-1+i$$

3. $\alpha = 1 + i, \beta = 1 - i$ 일 때, $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ 의 값은?

① i ② $-i$ ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1-i}{1+i} + \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1-i)^2 + (1+i)^2}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{(1-2i+i^2) + (1+2i+i^2)}{1-i^2}$$

$$= \frac{2+2i^2}{1-(-1)} = \frac{2-2}{2} = 0$$

4. 이차방정식 $x^2 - mx + 2m + 1 = 0$의 한 근이 1일 때 다른 한 근은? (단, m은 상수)

① 3 ② 2 ③ 0 ④ -1 ⑤ -3

해설

$x^2 - mx + 2m + 1 = 0$에 $x = 1$을 대입하면

$1 - m + 2m + 1 = 0 \quad \therefore m = -2$

$x^2 + 2x - 3 = 0, \quad (x+3)(x-1) = 0$

$\therefore x = -3,\ 1$

따라서, 다른 근은 -3

5. 이차방정식 $x^2 - 2x + k + 2 = 0$이 중근을 가지도록 하는 상수 k의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ 0 ④ -2 ⑤ 2

해설

$x^2 - 2x + (k+2) = 0$

$\frac{D}{4} = (-1)^3 - (k+2) = 0$

$1 - k - 2 = 0 \quad \therefore \; k = -1$

6. 이차방정식 $2x^2-4x+5=0$의 두 근을 α와 β라 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값은?

① -7 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 7

해설

$2x^2-4x+5=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\dfrac{5}{2}$

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2^3-3\times\frac{5}{2}\times 2\\ &= 8-15=-7\end{aligned}$$

7. 이차방정식 $x^2-10x+k=0$의 두 근의 비가 $2:3$이 되도록 상수 k의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 24

해설

주어진 방정식의 한 근을 2α라 하면
다른 한 근은 3α가 되므로

$$\begin{cases} 2\alpha+3\alpha=10 & \cdots\cdots ① \\ 2\alpha\times 3\alpha=k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①, ②를 풀면
$\alpha=2,\ k=6\times 2^2=24$

8. 실수 k 에 대하여 복소수 $z=2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z=2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0 이어야 한다.

$$
\begin{aligned}
z &= 2(k-i)-k(1+i)^2 \\
&= 2k-2i-2ki \\
&= 2k-(2+2k)i
\end{aligned}
$$

허수 부분이 0이려면 $2+2k=0$ 이어야 한다.

따라서 $k=-1$

9. x, y가 실수일 때, $(1+i)x+(1-i)y=\dfrac{2-i}{1+i}$을 만족하는 x, y 의 값은?

① $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=1$ ② $x=\dfrac{1}{2}$, $y=1$ ③ $x=1$, $y=-\dfrac{1}{2}$

④ $x=1$, $y=1$ ⑤ $x=1$, $y=\dfrac{1}{2}$

해설

$$(x+y)+(x-y)i=\frac{2-i}{1+i}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

$$\Rightarrow \quad x+y=\frac{1}{2},\quad x-y=-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2},\quad y=1$$

10. 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 4 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 상수 k 값들의 합은?

① 1 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 2

해설

중근을 가지려면 판별식 $D = 0$

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 4 = 0$$

$k^2 - 2k - 3 = 0,\ (k-3)(k+1) = 0$

$\therefore\ k = 3, -1$

11. 이차방정식 $x^2+(m+1)x+m+4=0$이 중근을 가질 때, 모든 실수 m의 값의 합을 구하면?

① -3　　② 0　　③ 2　　④ 3　　⑤ 5

해설

중근을 가지므로, 판별식 $D=0$

$D=(m+1)^2-4\cdot1\cdot(m+4)=m^2-2m-15=0$

$(m-5)(m+3)=0 \quad \therefore\ m=-3,\ 5$

$\therefore\ m$의 값의 합은 $-3+5=2$

12. 이차방정식 $ax^2+4x-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 a 값의 범위는?

① $a>-2$

② $-2<a<0,\ a>0$

③ $-2<a<0$

④ $a>2$

⑤ $a<0,\ 0<a<2$

해설

$ax^2+4x-2=0$에서

(i) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $a\neq0$이어야 한다.

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=2^2-(-2a)>0,\ 2a+4>0$

$\therefore a>-2$

따라서 실수 a값의 범위는

$-2<a<0$ 또는 $a>0$

13. 이차방정식 $3x^2-6x+k=0$이 허근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k \le 3$　② $k > 3$　③ $k \le 2$　④ $k > 2$　⑤ $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 : $D<0$

$3x^2-6x+k=0$

$$\frac{D}{4}=9-3k<0$$

$\therefore\ k>3$

14. 이차방정식 $x^2 - x(kx - 7) + 3 = 0$이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8　② -4　③ -2　④ 5　⑤ 2

해설

$x^2 - x(kx - 7) + 3 = 0$

$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$

$(1 - k)x^2 + 7x + 3 = 0$

(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로

x^2 의 계수는 $1 - k \neq 0$ 이어야 한다.

따라서 $k \neq 1$

(ii) 주어진 이차방정식이

허근을 갖기 위해서는

판별식 $D < 0$이어야 하므로

$D = 7^2 - 4 \cdot (1 - k) \cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$

$37 + 12k < 0$

$\therefore k < -\dfrac{37}{12}$

따라서 최대정수는 -4이다.

15. 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\frac{D}{4} = (k-a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$$

$\therefore \ -2ka - b + 2 = 0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a = 0, \ b = 2$

$\therefore \ a + b = 2$

16. 이차식 $x^2 + 2x + 4$ 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$

② $(x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3})$

③ $(x + 1 - \sqrt{2}i)(x + 1 + \sqrt{2}i)$

④ $(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$

⑤ $(x - 1 - \sqrt{2}i)(x - 1 + \sqrt{2}i)$

해설

$x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 해를 구하면

$x = -1 \pm \sqrt{1 - 4} = -1 \pm \sqrt{3}i$

$\therefore x^2 + 2x + 4$

$= \left\{x - (-1 + 3\sqrt{i}\right\} \left\{x - (-1 - \sqrt{3}i)\right\}$

$= (x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$

17. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1+2i$ 일 때 실수 a, b 를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 5$

해설

계수가 실수이므로 한 근이 $1+2i$ 이면 다른 한 근은 $1-2i$ 이다.
(두 근의 합) $= (1+2i)+(1-2i) = -a$ ······ ㉠
(두 근의 곱) $= (1+2i)(1-2i) = b$ ······ ㉡
$\therefore$ ㉠, ㉡에서
$a = -2,\ b = 5$ 이다.

18. $A=\dfrac{1-i}{1+i}$ 일 때, $1+A+A^2+A^3+\ \cdots\ +A^{2005}$ 의 값은?

① $-i$　② 1　③ 0　④ $1+i$　⑤ $1-i$

해설

$$A=\frac{1-i}{1+i}=-i$$

$$1+A+A^2+A^3+\ A^4+\cdots+A^{2005}$$

$$=1+\{(-i)+(-1)+i+1\}+\cdots+(-i)$$

$$=1-i$$

19. x에 대한 일차방정식 $5x+a=2x+12$의 해가 자연수일 때, 자연수 a의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개

④ 4개 ⑤ 무수히 많다

해설

$5x-2x=12-a, 3x=12-a$

$\therefore x=\dfrac{12-a}{3}$

자연수 $a=1,2,3,\cdots$ 을 대입했을 때,

$x=\dfrac{12-a}{3}$ 가 자연수가 되는 경우는

$12-a$ 가 3 의 배수이면서 $a<12$ 일 때이다.

i) $a=3$ 일 때, $x=\dfrac{12-3}{3}=3$

ii) $a=6$ 일 때, $x=\dfrac{12-6}{3}=2$

iii) $a=9$ 일 때, $x=\dfrac{12-9}{3}=1$

따라서 자연수 a의 개수는 3개이다.

20. 이차방정식 $x^2+2|x|-8=0$의 해는?

① $-2,\ 4$ ② $-2,\ 2$ ③ $-4,\ 4$

④ $-4,\ 2$ ⑤ $-4,\ -2,\ 2,\ 4$

해설

$x^2+2|x|-8=0$에서

i) $x>0$일 때,

$x^2+2x-8=0,\ (x+4)(x-2)-0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

그런데 $x>0$이므로 $x=2$

ii) $x<0$일 때,

$x^2+2x-8=0,\ (x-4)(x+2)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-2$

그런데 $x<0$이므로 $x=-2$

i), ii)에서 구하는 해는 $-2,\ 2$

21. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

▷ 정답 : $b=2$

해설

$x^2+ax+b=0$에 $x=1\pm i$를 대입하여 정리하면
$1+2i-1+a(1+i)+b=0$과
$a+b+(a+2)i=0$이다.
위 식을 정리하면 $a+b=0$과 $a+2=0$에서
$a=-2, b=2$이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켤레복소수 근을 갖는다.
따라서 두 근은 $1+i,\ 1-i$
근과 계수의 관계에서
$-a=(1+i)+(1-i)=2 \qquad \therefore a=-2$
$b=(1+i)(1-i)=2 \qquad \therefore b=2$

22. x에 관한 이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가질 때 $x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$의 근을 판별하면?

① 중근
② 한 실근과 한 허근
③ 서로 다른 두 실근
④ 서로 같은 두 실근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가지려면

$D' = 4+a-b=0$

$\therefore b=a+4$

$x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$

$x^2-2(a-1)x+a^2-2a+16=0$

$D' = (a-1)^2-(a^2-2a+16) = -15 < 0$

$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

23. 이차방정식 $(\sqrt{2}+1)x^2+x-\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근의 곱은?

① $-\sqrt{2}$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

해설

주어진 식의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=0$

$x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$

$(x+\sqrt{2})(x-1)$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=1$

따라서 두 근의 곱은 $-\sqrt{2}$

24. 복소수 z 에 대하여 다음의 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$ 이며, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수임)

㉠ $z\bar{z}$ 는 항상 실수이다.
㉡ $z+\bar{z}=0$ 이면, z 는 순허수이다.
㉢ $z+\bar{z}$ 는 항상 실수이다.
㉣ $z-\bar{z}$ 는 항상 순허수이다.
㉤ $\frac{1}{z}$ 과 $\frac{1}{\bar{z}}$ 의 실수부는 항상 동일하다.

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$

㉠ $z\bar{z}=a^2+b^2 \Rightarrow$ 실수

㉡ $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=0, a=0$

$\therefore\ z=bi \Rightarrow$순허수 ($\because\ z\neq 0$ 이므로 $b\neq 0$)

㉢ $z+\bar{z}=2a \Rightarrow$ 실수

㉣ $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$

순허수로 판단하기 쉬우나, $b=0$ 인 경우

$z-\bar{z}=0$ 으로 순허수가 아니다.

㉤ $\frac{1}{z}=c+di$ 라면 $\frac{1}{\bar{z}}=\overline{\frac{1}{z}}=c-di$ 이므로 참

25. x, y 가 실수일 때, 복소수 $z = x + yi$ 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 하면 $z\bar{z} = 3$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{3}{z}\right)$ 의 값은 ?

① x　　② y　　③ $x + y$

④ $x - y$　　⑤ $2x + y$

해설

$z = x + yi$, $\bar{z} = x - yi$ 이므로

$z \cdot \bar{z} = 3$ 이면 $\bar{z} = \frac{3}{z}$ 을 대입

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(z + \frac{3}{z}\right) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ &= \frac{1}{2}(x + yi + x - yi) \\ &= x\end{aligned}$$

26. $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10}+\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{8}$ 값을 구하면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 1

④ 0 ⑤ -1

해설

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\omega+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\omega^2+\omega+1=0$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \Rightarrow \omega^3=1$

$(\omega^3)^3\cdot\omega+(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

27. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$을 만족하는 양수 x에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$의 값은?

① 4 ② 2 ③ -1 ④ 5 ⑤ -5

해설

근의 공식을 이용하여 x를 구하면

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{41}}{4}$$

$x>0$이므로 $x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$

$4x-\sqrt{41}=-1,\ 2x^2+x=5$

(준식)$=(-1)^2+(2x^2+x-1)=1+(5-1)=5$

28. 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 4 = 0$에서 한 근만이 양이기 위한 a의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a \leq 0$　② $0 < a \leq 1$　③ $1 < a \leq 2$

④ $-2 < a \leq 2$　⑤ $-1 < a \leq 2$

해설

(i) $\alpha > 0,\ \beta < 0$일 때, $\alpha\beta = a^2 - 4 < 0$

$\therefore\ -2 < a < 2$

(ii) $\alpha > 0,\ \beta = 0$일 때,

$\alpha + \beta = a > 0,\ \alpha\beta = a^2 - 4 = 0$

$\therefore\ a = 2$

(i), (ii)에서 $-2 < a \leq 2$