

1. 다항식 $x^3 - 3x - 3$ 을 다항식 $x^2 - 2x - 1$ 로 나누었을 때의 몫이 $ax + b$ 이고, 나머지가 $cx + d$ 이었다. 이 때, $a + b + c + d$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$x^3 - 3x - 3 = (x^2 - 2x - 1)(ax + b) + cx + d$$

에서 계수를 비교하면

$$a = 1, -b + d = -3, -a - 2b + c = -3, b - 2a = 0$$

$$\text{에서 } a = 1, b = 2, d = -1, c = 2$$

$$\therefore a + b + c + d = 1 + 2 + (-1) + 2 = 4$$

2. $(6x^3 - x^2 - 5x + 5) \div (2x - 1)$ 의 몫을 a , 나머지를 b 라 할 때, $a + b$ 를 구하면?

- ① $3x^2 + x + 1$ ② $x^2 + x + 1$ ③ $3x^2 + 1$
④ $x^2 + x - 1$ ⑤ $3x^2 + x$

해설

나눗셈을 이용하면 $a = 3x^2 + x - 2$, $b = 3$
 $\therefore a + b = 3x^2 + x + 1$

해설

조립제법을 이용할 수 있다.

이 때, $2x - 1$ 로 나눈 몫은 $x - \frac{1}{2}$ 로 나눈 몫의 $\frac{1}{2}$ 이고 나머지는 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right) Q(x) + R \\ &= (2x - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot Q(x) + R \end{aligned}$$

3. $(2x^3 - 3x + 1) \div (x^2 + 2)$ 의 계산에서 나머지는?

① $-5x + 1$

② $-x + 1$

③ $5x + 1$

④ $x + 1$

⑤ $-7x + 1$

해설

$2x^3 - 3x + 1$ 을 $x^2 + 2$ 로 직접 나누어서 구한다.
몫 : $2x$, 나머지 : $-7x + 1$

4. 다항식 $x^3 - 2$ 를 $x^2 - 2$ 로 나눈 나머지는?

① 2

② -2

③ $-2x - 2$

④ $2x + 2$

⑤ $2x - 2$

해설

$$\frac{x^3 - 2}{x^2 - 2} = \frac{x^3 - 2x + 2x - 2}{x^2 - 2} = x + \frac{2x - 2}{x^2 - 2}$$

∴ 몫은 x , 나머지는 $2x - 2$

5. 다음 곱셈공식을 전개한 것 중 바른 것은?

① $(x-y-1)^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x - 2y$

② $(a+b)^2(a-b)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

③ $(-x+3)^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

④ $(a-b)(a^2+ab-b^2) = a^3 - b^3$

⑤ $(p-1)(p^2+1)(p^4+1) = p^{16} - 1$

해설

① $(x-y-1)^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y$

③ $(-x+3)^3 = -x^3 + 9x^2 - 27x + 27$

④ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

⑤ $(p-1)(p+1)(p^2+1)(p^4+1) = p^8 - 1$

6. 다음 중 $(x-y)^2(x+y)^2$ 을 전개한 식은?

① $x^4 - y^4$

② $x^2 - y^2$

③ $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

④ $x^4 - x^2y^2 + y^4$

⑤ $x^4 - 4x^2y^2 + y^4$

해설

$$\begin{aligned}(x-y)^2(x+y)^2 &= [(x-y)(x+y)]^2 \\ &= (x^2 - y^2)^2 \\ &= x^4 - 2x^2y^2 + y^4\end{aligned}$$

7. $(x+y)^n$ 을 전개할 때 항의 개수는 $n+1$ 개이다. 다항식 $\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$ 을 전개할 때, 항의 개수를 구하면?

- ① 7개 ② 8개 ③ 12개 ④ 13개 ⑤ 64개

해설

$$\begin{aligned} & \{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4 \\ &= \{(4a^2-9b^2)^3\}^4 \\ &= (4a^2-9b^2)^{12} \\ &\therefore (4a^2-9b^2)^{12} \text{의 항의 개수는 13개이다.} \end{aligned}$$

8. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$ 를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a , 상수항을 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

- ① 8 ② 15 ③ 24 ④ 36 ⑤ 47

해설

$$\begin{aligned} & (x-1)(x+2)(x-3)(x+4) \\ &= (x^2+x-2)(x^2+x-12)(x^2+x=X(\text{치환})) \\ &= (X-2)(X-12) \\ &= X^2-14X+24 \\ &= (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24 \\ &= x^4+2x^3-13x^2-14x+24 \\ \therefore a &= 1+2-13-14+24=0, b=24 \\ \therefore a+b &= 0+24=24 \end{aligned}$$

해설

- ㉠ 각 항 계수의 총합 구하기
 $x=1$ 대입, $a=0$
㉡ 상수항 구하기
 $x=0$ 대입, $b=24$

9. 등식 $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$ 가 x 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$-2 = 2a \quad \therefore a = -1$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$-3 = -b \quad \therefore b = 3$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$0 = 2c \quad \therefore c = 0$$

$$\therefore a + b + c = 2$$

10. 다음 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy 의 값을 구하여라.

$$(2k + 3)x + (3k - 1)y + 5k - 9 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

k 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(2x + 3y + 5)k + (3x - y - 9) = 0$$

이것은 k 에 대한 항등식이므로

$$2x + 3y + 5 = 0$$

$$3x - y - 9 = 0$$

연립방정식을 풀면 $x = 2, y = -3$

$$\therefore xy = 2 \times (-3) = -6$$

11. $(x+y)a - (x-y)b - (y-z)c - 4z = 0$ 이 x, y, z 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 곱 abc 를 구하면?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

x, y, z 에 대해 정리하면
 $(a-b)x + (a+b-c)y + (c-4)z = 0$
 x, y, z 에 대한 항등식이므로
 $a = b, a + b - c = 0, c = 4$
 $\therefore a = b = 2, c = 4$
 $\therefore abc = 16$

12. $x-y=1$ 을 만족하는 임의의 실수 x, y 에 대하여 $ax^2+bx+cy^2-1=0$ 이 항상 성립할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = x - 1$ 을 준식에 대입하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $(a+b+c)x^2 - (b+2c)x + c - 1 = 0$
 x 에 대한 항등식이므로
 $a+b+c=0, b+2c=0, c-1=0$
 $\therefore a=1, b=-2, c=1$
 $\therefore a+b+c=0$

13. 다항식 $6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$ 을 $3x - 2$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $Q(1) + R$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\begin{aligned}6x^3 - 7x^2 + 17x - 3 &= (3x - 2)Q(x) + R \\ \text{양변에 } x = 1 \text{을 대입하면, } 13 &= Q(1) + R \\ \therefore Q(1) + R &= 13\end{aligned}$$

해설

$6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$ 를 $3x - 2$ 로 직접 나누거나 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

14. 다항식 $f(x)$ 를 다항식 $g(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라 할 때 $f(x)$ 를 $\frac{g(x)}{n}$ 로 나눈 몫과 나머지를 나타낸 것은?

- ① 몫 : $nQ(x)$, 나머지 $R(x)$ ② 몫 : $\frac{Q(x)}{n}$, 나머지 $R(x)$
③ 몫 : $\frac{Q(x)}{n}$, 나머지 $\frac{R(x)}{n}$ ④ 몫 : $Q(x)$, 나머지 $\frac{R(x)}{x}$
⑤ 몫 : $nQ(x)$, 나머지 $nR(x)$

해설

$$f(x) = g(x)Q(x) + R(x) \cdots \text{㉠}$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{n}Q'(x) + R'(x) \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠에서 } f(x) = nQ(x)\frac{g(x)}{n} + R(x),$$

$$\frac{Q'(x)}{n} = Q(x), R'(x) = R(x)$$

$$\therefore Q'(x) = n \cdot Q(x), R'(x) = R(x)$$

15. 다항식 $x^3 + ax + b$ 가 다항식 $x^2 - x + 1$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
 $x^2 = x - 1$ 을 대입하면
 $ax + (b - 1) = 0$
이 등식이 x 에 대한 항등식이므로,
 $a = 0, b - 1 = 0$
 $\therefore a = 0, b = 1$
 $\therefore a + b = 1$

해설

$x^3 + ax + b$
 $= (x^2 - x + 1)Q(x)$
 $= (x^2 - x + 1)(x + b)$
 $\therefore b = 1, a = 0$

16. $2^{16} - 1$ 은 1과 10사이의 어떤 두 수로 나누어떨어진다. 이 때, 이 두 수의 합은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \text{ 임을 이용하여 } 2^{16} - 1 \text{ 을 인수분해하면} \\ 2^{16} - 1 &= (2^8)^2 - 1^2 \\ &= (2^8 + 1)(2^8 - 1) \\ &= (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^4 - 1) \\ &= (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2^2 - 1) \\ &= (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1)(2 - 1) \\ &= 257 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 3 \end{aligned}$$

따라서 $2^{16} - 1$ 을 나누었을 때 나누어 떨어지는 1과 10사이의 수

즉, 인수는 3과 5이고 이 두 수의 합은 8이다.

17. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x) + (1+x+x^2+x^3)^3$$

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

- i) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수
: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,
계수= 2
: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 x 를 곱할 때,
계수= 1
- ii) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수
 $x+x^2+x^3=Y$ 라 하면,
 $(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$
 $3Y=3x+3x^2+3x^3$
일차항의 계수= 3, 다른 항에는 일차항이 없다.
- i), ii)에서 $2+1+3=6$

18. $99 \times 101 \times (100^2 + 100 + 1) \times (100^2 - 100 + 1)$ 을 계산하면?

- ① $100^6 - 1$ ② $100^6 + 1$ ③ $100^9 - 1$
④ $100^9 + 1$ ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} 100 &= a \text{로 치환 하면} \\ (\text{준식}) &= (a-1)(a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1) \\ &= (a^3-1)(a^3+1) \\ &= a^6-1 \\ &= 100^6-1 \end{aligned}$$

19. $a + b + c = 7$, $a^2 + b^2 + c^2 = 21$, $abc = 8$ 일 때, $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ 의 값은?

- ① 26 ② 48 ③ 84 ④ 96 ⑤ 112

해설

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ 49 &= 21 + 2(ab + bc + ca) \\ \therefore ab + bc + ca &= 14 \\ a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) \\ &= (14)^2 - 2(8 \times 7) \\ &= 84\end{aligned}$$

20. 모든 실수 x 에 대하여 $P(x^2+1) = \{P(x)\}^2 + 1$, $P(0) = 0$ 을 만족한다.
2차 이하의 다항식 $P(x)$ 의 계수의 합은?

- ① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 무수히 많다.

해설

$P(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면
 $P(0) = 0$ 에서 $c = 0 \therefore P(x) = ax^2 + bx$
 $P(x^2+1) = \{P(x)\}^2 + 1$ 이므로
 $a(x^2+1)^2 + b(x^2+1) = (ax^2+bx)^2 + 1$
 $ax^4 + 2ax^2 + a + bx^2 + b = a^2x^4 + 2abx^3 + b^2x^2 + 1$
양변의 계수를 비교하면
 $a = a^2, 2ab = 0, 2a + b = b^2, a + b = 1$
 $a^2 = a$ 와 $a + b = 1$ 에서
 $(a, b) = (0, 1), (1, 0)$ 이 되는데
이 중 $(1, 0)$ 은 $2a + b = b^2$ 을 만족하지 않으므로 $(a, b) = (0, 1)$
즉, $P(x) = x$ 뿐이다.
 \therefore 계수의 합은 1

해설

$P(x^2+1) = \{P(x)\}^2 + 1$ 에서 $x = 0$ 을 대입하면
 $P(1) = \{P(0)\}^2 + 1$ 이 된다.
 $P(1) = 1$ (\therefore 모든 계수의 합은 $x = 1$ 대입)

21. x 에 대한 항등식 $(1+2x-x^2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$ 에서 $3a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10}$ 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

i) 항등식의 상수항 : $a_0 = 1$
ii) 항등식에 $x = 1, x = -1$ 을 대입하여 식을 만든다.
 $x = 1$ 을 대입하면 $2^5 = a_0 + a_1 + \dots + a_{10} \dots$ ①
 $x = -1$ 을 대입하면 $(-2)^5 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \dots + a_{10} \dots$ ②
① + ②: $0 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10})$
 $\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10} = 0$
 $3a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10} = 2(\because a_0 = 1)$

22. $a + b = 1$, $a^2 + b^2 = -1$ 일 때, $a^{2000} + b^{2006}$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a + b = 1$ 에서 $b = 1 - a$ 이고 $a^2 + b^2 = -1$ 이므로
 $a^2 + (1 - a)^2 = -1$, $2a^2 - 2a + 2 = 0$, $a^2 - a + 1 = 0$
이 식의 양변에 $a + 1$ 을 곱하면
 $(a + 1)(a^2 - a + 1) = 0$, $a^3 + 1 = 0$
같은 방법으로 하면
 $b^3 + 1 = 0$ 이므로 $a^3 = -1$, $b^3 = -1$
 $\therefore a^{2000} + b^{2006} = (a^3)^{666} \cdot a^2 + (b^3)^{668} \cdot b^2$
 $= a^2 + b^2 = -1$

23. 임의의 실수 x, y 에 대해서

$$y^{12} + 1 = x_0 + x_1(y-1) + x_2(y-1)^2 + x_3(y-1)^3 + \cdots + x_{12}(y-1)^{12}$$

이 성립할 때, $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11}$ 의 값은?

- ① 2^{11} ② 2^{12} ③ 2^{13} ④ 3^{11} ⑤ 3^{12}

해설

$$y = 2 \text{ 대입: } 2^{12} + 1 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}$$

$$y = 0 \text{ 대입: } 1 = x_0 - x_1 + x_2 - \cdots + x_{12}$$

각변끼리 빼주면

$$2^{12} = 2(x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11}) \text{ 이므로}$$

$$x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11} = 2^{12-1} = 2^{11}$$

24. n 이 자연수일 때 $x^{2n}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x + 2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $4^n(x + 2)$ 가 되도록 a, b 의 값을 정할 때, $a - 2b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -7

해설

$$x^{2n}(x^2 + ax + b) = (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2) \cdots \textcircled{1}$$

$x = -2$ 를 대입하면,

$$4^n(4 - 2a + b) = 0 \quad \therefore b = 2a - 4 \cdots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면

$$x^{2n}(x^2 + ax + 2a - 4)$$

$$= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2)$$

한편, $x^2 + ax + 2a - 4 = x^2 - 4 + a(x + 2)$

$$= (x + 2)(x - 2) + a(x + 2)$$

$$= (x + 2)(x - 2 + a)$$

$$\therefore x^{2n}(x + 2)(x - 2 + a)$$

$$= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2)$$

$$\therefore x^{2n}(x - 2 + a) = (x + 2)Q(x) + 4^n$$

$x = -2$ 를 대입하면

$$4^n(-4 + a) = 4^n \quad \therefore -4 + a = 1 \quad \therefore a = 5$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } b = 6 \quad \therefore a - 2b = -7$$

25. 다항식 x^3+ax-8 을 x^2+4x+b 로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$ 가 되도록 상수 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -7

해설

x^3+ax-8 을 x^2+4x+b 로 직접나눈 나머지는
 $(a-b+16)x+4b-8$
 $(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots\text{㉠}$
㉠이 x 에 대한 항등식이므로,
 $a-b+16=3, 4b-8=4$
 $\therefore a=-10, b=3$
 $\therefore a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$ 의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10, b=3, p=-4$ 를 구해도 된다.