1. 실수 k 에 대하여 복소수 $z=2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z=2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0 이어야 한다.

$z=2(k-i)-k(1+i)^2$

$=2k-2i-2ki$

$=2k-(2+2k)i$

허수 부분이 0 이려면 $2+2k=0$ 이어야 한다.

따라서 $k=-1$

2. $i+2i^2+3i^3+\cdots+50i^{50}$ 의 값은?

① $-26-25i$ ② $-26+25i$ ③ 0

④ $-25+26i$ ⑤ $25+26i$

해설

$i+2i^2+3i^3+\cdots+50i^{50}$

$=\{i+2\cdot(-1)+3\cdot(-i)+4\cdot1\}+\{5i+6\cdot(-1)+7\cdot(-i)+8\cdot1\}$

$+\cdots+\{45i+46\cdot(-1)+47\cdot(-i)+48\cdot1\}+49i+50\cdot(-1)$

$12(2-2i)+49i-50=-26+25i$

3. $x = 1998,\ y = 4331$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ i ⑤ $-i$

해설

$\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$

$= \dfrac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$

$= \dfrac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{(y-xi)(x+yi)} = 0$

4. α, β 가 복소수일 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0,\ \beta=0$ 이다. ㉡ $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$ 이다. ㉢ $\alpha=\overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 이다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 반례 : $\alpha=1,\ \beta=i$
㉡ (생략)
㉢ $\alpha=x+yi$ 라 하면
$\alpha\beta=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2$($x, y$는실수)
$x^2+y^2=0$ 이려면 $x=0, y=0$
즉, $\alpha=0$

5. x에 대한 일차방정식 $(a^2+3)x+1=a(4x+1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(a^2+3-4a)x=a-1$
모든 x에 대해 성립하려면
$a^2-4a+3=0,\ a-1=0$
공통근 : $a=1$

6. 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+4=0$ 이 중근을 갖도록 하는 상수 k 값들의 합은?

① 1 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 2

해설

중근을 가지려면 판별식 $D=0$

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-4=0$

$k^2-2k-3=0$, $(k-3)(k+1)=0$

$\therefore\ k=3,-1$

7. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3　② 0　③ 2
④ 4　⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설
유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$
근과 계수와의 관계에 의해
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

해설
$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입
$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$
계수가 유리수이므로
$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

8. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

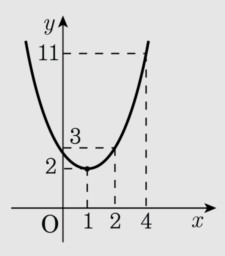
해설

$y=-3x^2-6x+k=-3(x^2+2x+1)+k+3=-3(x+1)^2+k+3$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k+3)$ 이다.
주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.
$\therefore\ k+3=\frac{5}{2}$ $\therefore\ k=-\frac{1}{2}$

9. $2 \le x \le 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

해설



$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

따라서 함수의 그래프는 점$(1, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이므로

(i) $x = 2$ 일 때 최소이며, 최솟값은 $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$

$\therefore\ m = 3$

(ii) $x = 4$ 일 때 최대이며, 최댓값은 $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$

$\therefore\ M = 11$

$\therefore\ M + m = 14$

10. 복소수 $(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 x의 값은?
(단, $i^2=-1$)

① -1 ② 1 ③ -3 ④ 3 ⑤ 7

해설

$(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$가 순허수이어야 하므로
$x^2+4x+3=0,\ x^2+2x-3\neq 0$
$(x+3)(x+1)=0,\ x=-1,\ x=-3$
$(x+3)(x-1)\neq 0,\ x\neq 1,\ x\neq -3$
$\therefore\ x=-1$

11. $a<0,\ b<0$ 일 때, 다음 등식 중에서 성립하지 <u>않는</u> 것은?

① $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$

② $\sqrt{a^3b}=-a\sqrt{ab}$

③ $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

④ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

⑤ $\sqrt{a^2b^2}=ab$

해설

$a=-\alpha,\ b=-\beta(\alpha>0,\ \beta>0)$ 로 놓으면

① $\sqrt{a^2b}=\sqrt{\alpha^2(-\beta)}=\alpha\sqrt{-\beta}=-a\sqrt{b}$

② $$\begin{aligned}\sqrt{a^3b}&=\sqrt{(\alpha)^3(-\beta)}\\&=\alpha\sqrt{(-\alpha)(-\beta)}\\&=-a\sqrt{ab}\end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned}\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}&=\sqrt{-\alpha}\sqrt{-\beta}\\&=\sqrt{\alpha}i\cdot\sqrt{\beta}i\\&=\sqrt{\alpha\beta}i^2\\&=-\sqrt{\alpha\beta}\\&=-\sqrt{ab}\end{aligned}$$

④ $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}&=\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{-\alpha}}\\&=\frac{\sqrt{\beta}i}{\sqrt{\alpha}i}\\&=\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\\&=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\\&=\sqrt{\frac{b}{a}}\end{aligned}$$

⑤ $\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{(-\alpha)^2(-\beta)^2}=\alpha\beta=ab$

12. 이차방정식 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근에 대한 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $k > 1$ 이면 두 근은 실근이다.

㉡ $k = 1$ 이면 중근을 갖는다.

㉢ 두 근의 곱은 실수이다.

㉣ $0 < k < 1$ 이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉣　③ ㉠, ㉡, ㉢
④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근을 구하면 $x = i \pm \sqrt{-1 + k}$
㉠ $k > 1$ 이어도 x 는 허수이다.<거짓>
㉡ $k = 1$ 이면 $x = i$ 로 중근을 갖는다.<참>
㉢ 두 근의 곱 $-k$ 는 허수일 수도 있다.<거짓>
㉣ $0 < k < 1$ 이면 $-1 < -1 + k < 0$ 이므로 $\sqrt{-1 + k} = ai(a \neq 1)$ 의 형태가 되어 x 는 순허수이다.

13. 방정식 $x^2 + |x| = |x-1| + 5$를 만족하는 두 근의 곱은?

① $-2\sqrt{6}$　　② $-\sqrt{6}$　　③ 0

④ $\sqrt{6}$　　⑤ $2\sqrt{6}$

해설

ⅰ) $x < 0$일 때

$x^2 - x = -(x-1) + 5,\ x^2 = 6$

$\therefore x = \pm\sqrt{6}$

그런데 $x < 0$이므로 $x = -\sqrt{6}$

ⅱ) $0 \le x < 1$일 때

$x^2 + x = -(x-1) + 5$

$x^2 + 2x - 6 = 0$

$\therefore x = -1 \pm \sqrt{7}$

그런데 $0 \le x < 1$이므로 해가 없다.

ⅲ) $x \ge 1$일 때,

$x^2 + x = x - 1 + 5,\ x^2 = 4$

$\therefore x = \pm 2$

그런데 $x \ge 1$이므로 $x = 2$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 주어진 방정식의 해는

$x = 2$ 또는 $x = -\sqrt{6}$이므로

두 근의 곱은 $-2\sqrt{6}$

14. 이차방정식 $x^2 + ax + 2b = 0$의 한 근이 $2 + ai$일 때 실수 a, b의 합 $a + b$의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -9　② -5　③ 3　④ 6　⑤ 12

해설

한 근이 $2 + ai$이므로 다른 한 근은 $2 - ai$이다.
$\therefore$두 근의 합 $-a = 4$　$\therefore a = -4$
두 근의 곱 $(2 - 4i)(2 + 4i) = 4 + 16 = 2b$
$\therefore b = 10$　$\therefore a + b = 10 - 4 = 6$

15. 다음 설명 중 틀린 것을 고르면?

① $x^2+5x+1=0$은 서로 다른 두 실근 을 가진다.

② $x^2+5=0$는 두 허근을 가진다.

③ $m=0$ 또는 4일 때, $x^2-mx+m=0$은 중근을 가진다.

④ $k \geqq 1$일 때 $x^2-2x+2-k=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다

⑤ $x^2-6x+a=0$ 은 $a=9$일 때만 중근을 가진다.

해설

① $25-4\cdot1\cdot1=21>0$
② $0^2-4\cdot1\cdot1=-4<0$
③ $(-m)^2-4\cdot1\cdot m=m(m-4)=0$
⑤ $9-1\cdot a=9-a=0,\ a=9$
⇒ ④ $(-1)^2-1\cdot(2-k)=k-1>0\ \therefore\ k>1$

16. x에 대한 이차방정식 $x^2k-\left(x-\dfrac{1}{4}\right)k+\dfrac{1}{4}=0$이 허근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k<0$　② $k>0$　③ $0<k<\dfrac{1}{4}$
④ $k\le 0$　⑤ $k\ge 0$

해설

$x^2k-\left(x-\dfrac{1}{4}\right)k+\dfrac{1}{4}=0$이
허근을 가져야 하므로
x에 대한 내림차순으로 정리하면
$kx^2-kx+\dfrac{1}{4}(k+1)=0$
$D=(-k)^2-4k\cdot\dfrac{1}{4}(k+1)<0$
$=k^2-k^2-k=-k<0 \quad \therefore k>0$
$\therefore k>0$

17. x에 관한 이차방정식 $x^2-2(m-a+1)x+m^2+a^2-2b=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 $a,\ b$의 값을 정하면?

① $a=-1,\ b=\frac{1}{2}$
② $a=1,\ b=\frac{1}{2}$
③ $a=-1,\ b=-\frac{1}{2}$
④ $a=1,\ b=-\frac{1}{2}$
⑤ $a=1,\ b=-1$

해설

$\frac{D}{4}=0$이므로

$(m-a+1)^2-(m^2+a^2-2b)=0$,

m에 관하여 정리하면

$2(-a+1)m-2a+2b+1=0$

m에 관계없이 성립하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+2b+1=0$

$\therefore\ a=1,\ b=\frac{1}{2}$

18. x에 관한 다음 이차방정식이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 또 음근의 절댓값이 양근 보다 크기 위한 m의 범위를 구하면?

$(m+3)x^2-4mx+2m-1=0$

① $-2<m<0$ ② $-3<m<0$ ③ $-2<m<1$
④ $-2<m<2$ ⑤ $-2<m<3$

해설

음근의 절댓값이 양근보다 크기 위한 조건은
$\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta<0$

$\alpha+\beta=\dfrac{4m}{m+3}<0$

$\therefore\ 4m(m+3)<0$

$\therefore\ -3<m<0\ \cdots\cdots$㉠

$\alpha\beta=\dfrac{2m-1}{m+3}<0$

$\therefore\ (2m-1)(m+3)<0$

$\therefore\ -3<m<\dfrac{1}{2}\ \cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡를 동시에 만족하는 m의 범위는
$-3<m<0$

19. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$의 그래프가 x축과 만나지 않기 위한 정수 k의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면

이차방정식 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9 = 0$의 판별식을 D라 할 때 $D < 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 9 < 0$

$k^2 - 2k - 8 < 0$, $(k+2)(k-4) < 0$

$\therefore -2 < k < 4$

따라서, k값 중 정수인 것은 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

20. 이차함수 $y = x^2 + ax + 1$의 그래프와 직선 $y = 3x - 8$이 만나지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $-5 < a < -1$ ② $-3 < a < 9$ ③ $-1 < a < 4$
④ $2 < a < 6$ ⑤ $4 < a < 7$

해설

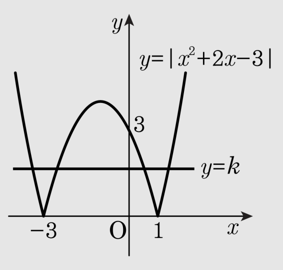
이차방정식 $x^2 + ax + 1 = 3x - 8$,
즉 $x^2 + (a-3)x + 9 = 0$ 이 이차방정식이 허근을 가져야 하므로
$D = (a-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 < 0$
$a^2 - 6a - 27 < 0$
$(a+3)(a-9) < 0$
$\therefore -3 < a < 9$

21. x에 대한 방정식 $|x^2+2x-3|=k$가 양의 근 2개와 음의 근 2개를 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위는?

① $k \geq 3$　　② $k > 4$　　③ $3 \leq k < 4$
④ $0 < k < 3$　　⑤ $0 < k < 4$

해설

방정식 $|x^2+2x-3|=k$의 근은 두 함수 $y=|x^2+2x-3|$, $y=k$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.
따라서 그림에서 교점의 x좌표가 양수 2개,
음수 2개가 되려면 $0 < k < 3$



22. $|x|(2+3i)+2|y|(1-2i)=6-5i$를 만족하는 실수 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$를 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이는?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$(2|x|+2|y|)+(3|x|-4|y|)i=6-5i$

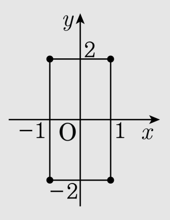
복소수의 상등에 의하여

$|x|+|y|=3,\ 3|x|-4|y|=-5$

두 식을 연립하면

$|x|=1,\ \ |y|=2$

$(x,\ y)\ \rightarrow\ (1,\ 2),\ (1,-2),\ (-1,\ 2),\ (-1,\ -2)$



$\therefore$ 직사각형의 넓이 $=2\times 4=8$

23. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$의 두 근을 α, β라고 하자. α^2, β^2이 방정식 $x^2 - 3px + 4(q-1) = 0$의 두 근일 때, p의 값은?

① -4 또는 1　② -3 또는 2　③ -2 또는 3

④ -1 또는 4　⑤ 2 또는 5

해설

$\alpha + \beta = p,\ \alpha\beta = q \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha^2 + \beta^2 = 3p,\ \alpha^2\beta^2 = 4(q-1) \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$\therefore\ 3p = p^2 - 2q \cdots\cdots$ ㉢

$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$

$\therefore\ 4(q-1) = q^2 \cdots\cdots$ ㉣

㉣에서 $q^2 - 4q + 4 = 0,\ (q-2)^2 = 0$

$\therefore\ q = 2$

㉢에 대입하여 정리하면,

$p^2 - 3p - 4 = 0,\ (p+1)(p-4) = 0$

$\therefore\ p = -1,\ 4$

24. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+4xy+y^2=10 \end{cases}$ 의 한 쌍의 근을 $(\alpha,\ \beta)$라 할 때, $\alpha^2,\ \beta^2$을 두 근으로 갖는 이차방정식으로 옳은 것은?

① $x^2-5x+3=0$ ② $x^2+5x-3=0$

③ $x^2-5x+1=0$ ④ $x^2+6x-1=0$

⑤ $x^2-6x+1=0$

해설

$\begin{cases} \alpha-\beta=2 & \cdots ㉠ \\ \alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이므로

㉠의 양변을 제곱하면

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=4 \quad \cdots ㉢$

㉡ − ㉢에서

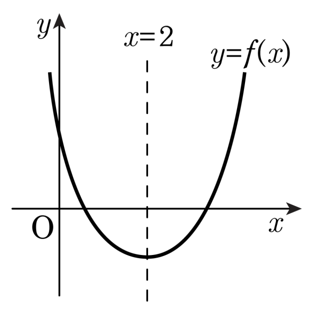
$\alpha\beta=1 \quad \cdots ㉣$

㉣을 ㉡에 대입하면 $\alpha^2+\beta^2=6,\ \alpha^2\beta^2=1$

$\therefore\ \alpha^2,\ \beta^2$을 두 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2-6x+1=0$

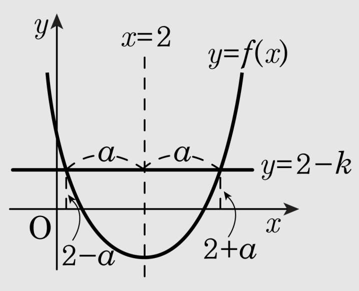
25. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x에 대한 방정식 $(f \circ f)(x) = 0$ 의 모든 실근의 합은? (단, $y = f(x)$ 의 그래프는 x축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = t$ 로 놓으면
$f(t) = 0$ 을 만족시키는 두 실근은
$t = 2 - k$ 또는 $f = 2 + k$
$(0 < k < 2)$ 로 놓을 수 있다.
$\therefore f(x) = 2 - k$ 또는 $f(x) = 2 + k$



(i) $f(x) = 2 - k$ 를 만족시키는 x 의 값은
$y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = 2 - k$ 의 교점의 x좌표이므로
$x = 2 - \alpha$ 또는 $x = 2 + \alpha$
(ii) $f(x) = 2 + k$ 를 만족시키는 x 의 값도
마찬가지로 생각하면 $x = 2 - \beta$ 또는 $x = 2 + \beta$
따라서 $f(f(x)) = 0$ 을 만족시키는 모든 실근의 합은
$(2 - \alpha) + (2 + \alpha) + (2 - \beta) + (2 + \beta) = 8$

26. $x,\ y$ 가 실수일 때, $2x^2-8x+y^2+2y+6$ 의 최솟값은?

① -5　　② -3　　③ -1　　④ 1　　⑤ 3

해설

$2x^2-8x+y^2+2y+6$
$=2\left(x^2-4x\right)+\left(y^2+2y\right)+6$
$=2(x-2)^2+(y+1)^2-3$
$x,\ y$ 는 실수이므로 $(x-2)^2\ge 0$, $(y+1)^2\ge 0$
$\therefore 2x^2-8x+y^2+2y+6\ge -3$
따라서, $x=2,\ y=-1$ 일 때 최솟값은 -3 이다.

27. $yx^2 + yx + y = x^2 - x + 1$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 y 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면

$(y-1)x^2 + (y+1)x + y - 1 = 0$

(i) $y = 1$ 일 때, $2x = 0$

$\therefore x = 0$

(ii) $y \neq 1$ 일 때, 이 식을 x 에 대한 이차방정식으로 보면 x 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$D = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0$

$3y^2 - 10y + 3 \leq 0$

$(3y-1)(y-3) \leq 0$

$\therefore \frac{1}{3} \leq y \leq 3$

따라서 (i), (ii) 에 의하여 y 의 최댓값은 3 , 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이므로

최댓값과 최솟값의 곱은 $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ 이다.

28. 복소수 z가 $z^2 = \bar{z}$일 때, z이 될 수 있는 수들의 합을 구하여라.(단, $\bar{z}$는 z 의 켤레복소수이다.)

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = a + bi$ (단, a, b 는 실수)라 하면
$z^2 = \bar{z}$ 에서 $(a + bi)^2 = a - bi$
$\therefore a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$
$a^2 - b^2 = a, 2ab = -b$
$\therefore b = 0$ 또는 $a = -\frac{1}{2}$
i) $b = 0$ 일 때 : $a^2 = a \therefore a = 0$ 또는 $a = 1$
ii) $a = -\frac{1}{2}$일때 : $\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2}$ $\quad \therefore b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\therefore\ z = 0,\ 1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
따라서 모든 z의 합은 0이다.

29. 세 방정식 $x^2+2ax+bc=0$, $x^2+2bx+ca=0$, $x^2+2cx+ab=0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a, b, c는 실수)

① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.

② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.

③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.

④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.

⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$\frac{D_1}{4}=a^2-bc$,

$\frac{D_2}{4}=b^2-ca$,

$\frac{D_3}{4}=c^2-ab$라 하면

$\frac{D_1}{4}+\frac{D_2}{4}+\frac{D_3}{4}$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq 0$

따라서, $\frac{D_1}{4}$, $\frac{D_2}{4}$, $\frac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

30. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)+(2-\alpha)(2-\beta)+\cdots+(5-\alpha)(5-\beta)$의 값을 구하면?

① 50 ② 40 ③ 10 ④ 30 ⑤ 20

해설

$x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)+(2-\alpha)(2-\beta)+\cdots+(5-\alpha)(5-\beta)$

$=(1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta\} + \{4-2(\alpha+\beta)+\alpha\beta\} + \cdots + \{25-5(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}$

$=(1+4+9+16+25)-(1+2+3+4+5)(\alpha+\beta)+5\alpha\beta$

$=55-15\times 2-5=55-30-5=20$