

1. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 2(k-i) - k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = 2(k-i) - k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0이어야 한다.

$$\begin{aligned} z &= 2(k-i) - k(1+i)^2 \\ &= 2k - 2i - 2ki \\ &= 2k - (2 + 2k)i \end{aligned}$$

허수 부분이 0이려면 $2 + 2k = 0$ 이어야 한다.

따라서 $k = -1$

2. $i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 50i^{50}$ 의 값은?

① $-26 - 25i$

② $-26 + 25i$

③ 0

④ $-25 + 26i$

⑤ $25 + 26i$

해설

$$\begin{aligned} & i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 50i^{50} \\ &= \{i + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-i) + 4 \cdot 1\} + \\ & \{5i + 6 \cdot (-1) + 7 \cdot (-i) + 8 \cdot 1\} \\ & + \cdots + \{45i + 46 \cdot (-1) + 47 \cdot (-i) + 48 \cdot 1\} + 49i + 50 \cdot (-1) \\ & 12(2 - 2i) + 49i - 50 = -26 + 25i \end{aligned}$$

3. $x = 1998, y = 4331$ 일 때, $\frac{x + yi}{y - xi} + \frac{y - xi}{x + yi}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ -1

④ i

⑤ $-i$

해설

$$\frac{x + yi}{y - xi} + \frac{y - xi}{x + yi}$$

$$= \frac{(x + yi)^2 + (y - xi)^2}{(y - xi)(x + yi)}$$

$$= \frac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{(y - xi)(x + yi)} = 0$$

4. α, β 가 복소수일 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

㉡ $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 또는 $\beta = 0$ 이다.

㉢ $\alpha = \bar{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$

㉡ (생략)

㉢ $\alpha = x + yi$ 라 하면

$$\alpha\beta = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 \quad (x, y \text{는 실수})$$

$$x^2 + y^2 = 0 \text{ 이려면 } x = 0, y = 0$$

$$\text{즉, } \alpha = 0$$

5. x 에 대한 일차방정식 $(a^2 + 3)x + 1 = a(4x + 1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$(a^2 + 3 - 4a)x = a - 1$$

모든 x 에 대해 성립하려면

$$a^2 - 4a + 3 = 0, \quad a - 1 = 0$$

공통근 : $a = 1$

6. 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 4 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 상수 k 값들의 합은?

① 1

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 2

해설

중근을 가지려면 판별식 $D = 0$

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 4 = 0$$

$$k^2 - 2k - 3 = 0, (k-3)(k+1) = 0$$

$$\therefore k = 3, -1$$

7. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3

② 0

③ 2

④ 4

⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$

근과 계수와의 관계에 의해

$$a = 4, b = 1$$

$$\therefore ab = 4$$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입

$$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$$

계수가 유리수이므로

$$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$$

$$a = 4, b = 1$$

$$\therefore ab = 4$$

8. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$

② 0

③ $\frac{1}{2}$

④ 1

⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = -3x^2 - 6x + k = -3(x^2 + 2x + 1) + k + 3 = -3(x+1)^2 + k + 3$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k+3)$ 이다.

주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.

$$\therefore k + 3 = \frac{5}{2} \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$$

9. $2 \leq x \leq 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$$y = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$$

따라서 함수의 그래프는 점(1,2)를 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이므로

(i) $x = 2$ 일 때 최소이며, 최솟값은

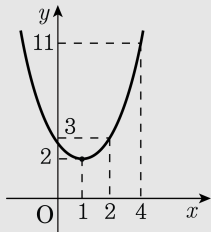
$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$$

$$\therefore m = 3$$

(ii) $x = 4$ 일 때 최대이며, 최댓값은 $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$

$$\therefore M = 11$$

$$\therefore M + m = 14$$



10. 복소수 $(1+i)x^2 + 2(2+i)x + 3 - 3i$ 를 제공하면 음의 실수가 된다.
이 때, 실수 x 의 값은?
(단, $i^2 = -1$)

- ① -1 ② 1 ③ -3 ④ 3 ⑤ 7

해설

$(x^2 + 4x + 3) + (x^2 + 2x - 3)i$ 가 순허수이어야 하므로

$$x^2 + 4x + 3 = 0, \quad x^2 + 2x - 3 \neq 0$$

$$(x+3)(x+1) = 0, \quad x = -1, \quad x = -3$$

$$(x+3)(x-1) \neq 0, \quad x \neq 1, \quad x \neq -3$$

$$\therefore x = -1$$

11. $a < 0, b < 0$ 일 때, 다음 등식 중에서 성립하지 않는 것은?

① $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$

② $\sqrt{a^3b} = -a\sqrt{ab}$

③ $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

④ $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$

⑤ $\sqrt{a^2b^2} = ab$

해설

$a = -\alpha, b = -\beta (\alpha > 0, \beta > 0)$ 로 놓으면

① $\sqrt{a^2b} = \sqrt{\alpha^2(-\beta)} = \alpha\sqrt{-\beta} = -a\sqrt{b}$

② $\sqrt{a^3b} = \sqrt{(\alpha)^3(-\beta)}$
 $= \alpha\sqrt{(-\alpha)(-\beta)}$
 $= -a\sqrt{ab}$

③ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{-\alpha} \sqrt{-\beta}$
 $= \sqrt{\alpha}i \cdot \sqrt{\beta}i$
 $= \sqrt{\alpha\beta}i^2$
 $= -\sqrt{\alpha\beta}$
 $= -\sqrt{ab}$

④ $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{-\alpha}}$
 $= \frac{\sqrt{\beta}i}{\sqrt{\alpha}i}$
 $= \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$
 $= \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$
 $= \sqrt{\frac{b}{a}}$

⑤ $\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{(-\alpha)^2(-\beta)^2} = \alpha\beta = ab$

12. 이차방정식 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $k > 1$ 이면 두 근은 실근이다.
 ㉡ $k = 1$ 이면 중근을 갖는다.
 ㉢ 두 근의 곱은 실수이다.
 ㉤ $0 < k < 1$ 이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉤

③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근을 구하면 $x = i \pm \sqrt{-1+k}$

㉠ $k > 1$ 이어도 x 는 허수이다.<거짓>

㉡ $k = 1$ 이면 $x = i$ 로 중근을 갖는다.<참>

㉢ 두 근의 곱 $-k$ 는 허수일 수도 있다.<거짓>

㉤ $0 < k < 1$ 이면 $-1 < -1+k < 0$ 이므로 $\sqrt{-1+k} = ai (a \neq 1)$ 의 형태가 되어 x 는 순허수이다.

13. 방정식 $x^2 + |x| = |x - 1| + 5$ 를 만족하는 두 근의 곱은?

① $-2\sqrt{6}$

② $-\sqrt{6}$

③ 0

④ $\sqrt{6}$

⑤ $2\sqrt{6}$

해설

i) $x < 0$ 일 때

$$x^2 - x = -(x - 1) + 5, x^2 = 6$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{6}$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -\sqrt{6}$

ii) $0 \leq x < 1$ 일 때

$$x^2 + x = -(x - 1) + 5$$

$$x^2 + 2x - 6 = 0$$

$$\therefore x = -1 \pm \sqrt{7}$$

그런데 $0 \leq x < 1$ 이므로 해가 없다.

iii) $x \geq 1$ 일 때,

$$x^2 + x = x - 1 + 5, x^2 = 4$$

$$\therefore x = \pm 2$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 2$

i), ii), iii)에서 주어진 방정식의 해는

$x = 2$ 또는 $x = -\sqrt{6}$ 이므로

두 근의 곱은 $-2\sqrt{6}$

14. 이차방정식 $x^2 + ax + 2b = 0$ 의 한 근이 $2 + ai$ 일 때 실수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -9

② -5

③ 3

④ 6

⑤ 12

해설

한 근이 $2 + ai$ 이므로 다른 한 근은 $2 - ai$ 이다.

$\therefore$ 두 근의 합 $-a = 4 \quad \therefore a = -4$

두 근의 곱 $(2 - 4i)(2 + 4i) = 4 + 16 = 2b$

$\therefore b = 10 \quad \therefore a + b = 10 - 4 = 6$

15. 다음 설명 중 틀린 것을 고르면?

① $x^2 + 5x + 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가진다.

② $x^2 + 5 = 0$ 는 두 허근을 가진다.

③ $m = 0$ 또는 4일 때, $x^2 - mx + m = 0$ 은 중근을 가진다.

④ $k \geq 1$ 일 때 $x^2 - 2x + 2 - k = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가진다

⑤ $x^2 - 6x + a = 0$ 은 $a = 9$ 일 때만 중근을 가진다.

해설

① $25 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 21 > 0$

② $0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$

③ $(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = m(m - 4) = 0$

⑤ $9 - 1 \cdot a = 9 - a = 0, a = 9$

$\Rightarrow$ ④ $(-1)^2 - 1 \cdot (2 - k) = k - 1 > 0 \therefore k > 1$

16. x 에 대한 이차방정식 $x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0$ 이 허근을 가질 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $k < 0$

② $k > 0$

③ $0 < k < \frac{1}{4}$

④ $k \leq 0$

⑤ $k \geq 0$

해설

$$x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0 \text{ 이}$$

허근을 가져야 하므로

x 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$kx^2 - kx + \frac{1}{4}(k+1) = 0$$

$$D = (-k)^2 - 4k \cdot \frac{1}{4}(k+1) < 0$$

$$= k^2 - k^2 - k = -k < 0 \quad \therefore k > 0$$

$$\therefore k > 0$$

17. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2(m - a + 1)x + m^2 + a^2 - 2b = 0$ 이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 a, b 의 값을 정하면?

① $a = -1, b = \frac{1}{2}$

② $a = 1, b = \frac{1}{2}$

③ $a = -1, b = -\frac{1}{2}$

④ $a = 1, b = -\frac{1}{2}$

⑤ $a = 1, b = -1$

해설

$\frac{D}{4} = 0$ 이므로

$$(m - a + 1)^2 - (m^2 + a^2 - 2b) = 0,$$

m 에 관하여 정리하면

$$2(-a + 1)m - 2a + 2b + 1 = 0$$

m 에 관계없이 성립하므로

$$2(-a + 1) = 0, -2a + 2b + 1 = 0$$

$$\therefore a = 1, b = \frac{1}{2}$$

18. x 에 관한 다음 이차방정식이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 또 음근의 절댓값이 양근 보다 크기 위한 m 의 범위를 구하면?

$$(m+3)x^2 - 4mx + 2m - 1 = 0$$

① $-2 < m < 0$

② $-3 < m < 0$

③ $-2 < m < 1$

④ $-2 < m < 2$

⑤ $-2 < m < 3$

해설

음근의 절댓값이 양근보다 크기 위한 조건은

$$\alpha + \beta < 0, \alpha\beta < 0$$

$$\alpha + \beta = \frac{4m}{m+3} < 0$$

$$\therefore 4m(m+3) < 0$$

$$\therefore -3 < m < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha\beta = \frac{2m-1}{m+3} < 0$$

$$\therefore (2m-1)(m+3) < 0$$

$$\therefore -3 < m < \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡를 동시에 만족하는 m 의 범위는

$$-3 < m < 0$$

19. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않기 위한 정수 k 의 개수는?

① 4개

② 5개

③ 6개

④ 7개

⑤ 8개

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으려면

이차방정식 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때 $D < 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 9 < 0$$

$$k^2 - 2k - 8 < 0, (k+2)(k-4) < 0$$

$$\therefore -2 < k < 4$$

따라서, k 값 중 정수인 것은 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

20. 이차함수 $y = x^2 + ax + 1$ 의 그래프와 직선 $y = 3x - 8$ 이 만나지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $-5 < a < -1$

② $-3 < a < 9$

③ $-1 < a < 4$

④ $2 < a < 6$

⑤ $4 < a < 7$

해설

이차방정식 $x^2 + ax + 1 = 3x - 8$,

즉 $x^2 + (a - 3)x + 9 = 0$ 이 이차방정식이 허근을 가져야 하므로

$$D = (a - 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 < 0$$

$$a^2 - 6a - 27 < 0$$

$$(a + 3)(a - 9) < 0$$

$$\therefore -3 < a < 9$$

21. x 에 대한 방정식 $|x^2 + 2x - 3| = k$ 가 양의 근 2개와 음의 근 2개를 갖도록 하는 상수 k 의 값의 범위는?

① $k \geq 3$

② $k > 4$

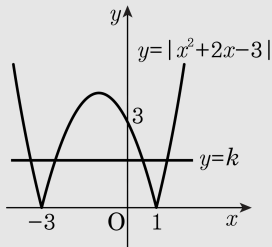
③ $3 \leq k < 4$

④ $0 < k < 3$

⑤ $0 < k < 4$

해설

방정식 $|x^2 + 2x - 3| = k$ 의 근은
두 함수 $y = |x^2 + 2x - 3|$, $y = k$ 의
그래프의 교점의 x 좌표와 같다.
따라서 그림에서 교점의 x 좌표가 양
수 2개,
음수 2개가 되려면 $0 < k < 3$



22. $|x|(2+3i) + 2|y|(1-2i) = 6-5i$ 를 만족하는 실수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 를 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이는?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$(2|x| + 2|y|) + (3|x| - 4|y|)i = 6 - 5i$$

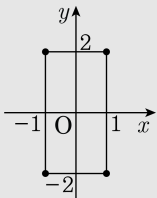
복소수의 상등에 의하여

$$|x| + |y| = 3, \quad 3|x| - 4|y| = -5$$

두 식을 연립하면

$$|x| = 1, \quad |y| = 2$$

$$(x, y) \rightarrow (1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)$$



$$\therefore \text{직사각형의 넓이} = 2 \times 4 = 8$$

23. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하자. α^2, β^2 이 방정식 $x^2 - 3px + 4(q-1) = 0$ 의 두 근일 때, p 의 값은?

① -4 또는 1

② -3 또는 2

③ -2 또는 3

④ -1 또는 4

⑤ 2 또는 5

해설

$$\alpha + \beta = p, \alpha\beta = q \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 3p, \alpha^2\beta^2 = 4(q-1) \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$\therefore 3p = p^2 - 2q \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$$

$$\therefore 4(q-1) = q^2 \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉣} \text{에서 } q^2 - 4q + 4 = 0, (q-2)^2 = 0$$

$$\therefore q = 2$$

㉢에 대입하여 정리하면,

$$p^2 - 3p - 4 = 0, (p+1)(p-4) = 0$$

$$\therefore p = -1, 4$$

24. 연립방정식 $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + 4xy + y^2 = 10 \end{cases}$ 의 한 쌍의 근을 (α, β) 라 할 때,

α^2, β^2 을 두 근으로 갖는 이차 방정식으로 옳은 것은?

① $x^2 - 5x + 3 = 0$

② $x^2 + 5x - 3 = 0$

③ $x^2 - 5x + 1 = 0$

④ $x^2 + 6x - 1 = 0$

⑤ $x^2 - 6x + 1 = 0$

해설

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 2 & \dots \textcircled{㉠} \\ \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 = 10 & \dots \textcircled{㉡} \end{cases} \text{이므로}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 4 \quad \dots \textcircled{㉢}$$

㉡ - ㉢에서

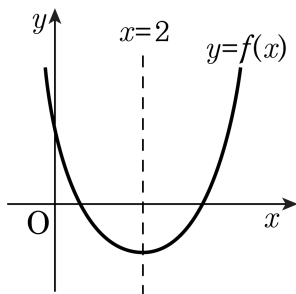
$$\alpha\beta = 1 \quad \dots \textcircled{㉣}$$

㉣을 ㉡에 대입하면 $\alpha^2 + \beta^2 = 6, \alpha^2\beta^2 = 1$

$\therefore \alpha^2, \beta^2$ 을 두 근으로 갖는 이차방정식은

$$x^2 - 6x + 1 = 0$$

25. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x 에 대한 방정식 $(f \circ f)(x) = 0$ 의 모든 실근의 합은? (단, $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

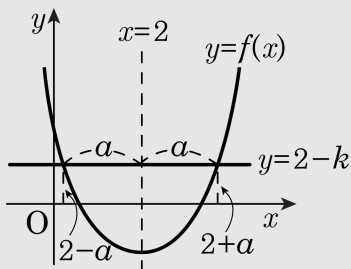
$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = t$ 로 놓으면

$f(t) = 0$ 을 만족시키는 두 실근은

$t = 2 - k$ 또는 $t = 2 + k$

$(0 < k < 2)$ 로 놓을 수 있다.

$\therefore f(x) = 2 - k$ 또는 $f(x) = 2 + k$



(i) $f(x) = 2 - k$ 를 만족시키는 x 의 값은

$y = f(x)$ 의 그래프와

직선 $y = 2 - k$ 의 교점의 x 좌표이므로

$x = 2 - a$ 또는 $x = 2 + a$

(ii) $f(x) = 2 + k$ 를 만족시키는 x 의 값도

마찬가지로 생각하면 $x = 2 - b$ 또는 $x = 2 + b$

따라서 $f(f(x)) = 0$ 을 만족시키는 모든 실근의 합은

$(2 - a) + (2 + a) + (2 - b) + (2 + b) = 8$

26. x, y 가 실수일 때, $2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6$ 의 최솟값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$$2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6$$

$$= 2(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) + 6$$

$$= 2(x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 3$$

$$x, y \text{ 는 실수이므로 } (x - 2)^2 \geq 0, (y + 1)^2 \geq 0$$

$$\therefore 2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6 \geq -3$$

따라서, $x = 2, y = -1$ 일 때 최솟값은 -3 이다.

27. $yx^2 + yx + y = x^2 - x + 1$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 y 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면

$$(y-1)x^2 + (y+1)x + y-1 = 0$$

(i) $y=1$ 일 때, $2x=0$

$$\therefore x=0$$

(ii) $y \neq 1$ 일 때, 이 식을 x 에 대한 이차방정식으로 보면 x 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$$D = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0$$

$$3y^2 - 10y + 3 \leq 0$$

$$(3y-1)(y-3) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq y \leq 3$$

따라서 (i), (ii)에 의하여 y 의 최댓값은 3, 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이므로

최댓값과 최솟값의 곱은 $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ 이다.

28. 복소수 z 가 $z^2 = \bar{z}$ 일 때, z 이 될 수 있는 수들의 합을 구하여라.(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① -2

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$z = a + bi$ (단, a, b 는 실수)라 하면

$$z^2 = \bar{z} \text{ 에서 } (a + bi)^2 = a - bi$$

$$\therefore a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$$

$$a^2 - b^2 = a, 2ab = -b$$

$$\therefore b = 0 \text{ 또는 } a = -\frac{1}{2}$$

i) $b = 0$ 일 때 : $a^2 = a \therefore a = 0$ 또는 $a = 1$

ii) $a = -\frac{1}{2}$ 일 때 : $\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2} \therefore b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore z = 0, 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

따라서 모든 z 의 합은 0이다.

29. 세 방정식 $x^2 + 2ax + bc = 0$, $x^2 + 2bx + ca = 0$, $x^2 + 2cx + ab = 0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a, b, c 는 실수)

- ① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.
- ② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.
- ③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.
- ④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.
- ⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - bc,$$

$$\frac{D_2}{4} = b^2 - ca,$$

$$\frac{D_3}{4} = c^2 - ab \text{라 하면}$$

$$\frac{D_1}{4} + \frac{D_2}{4} + \frac{D_3}{4}$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \geq 0$$

따라서, $\frac{D_1}{4}$, $\frac{D_2}{4}$, $\frac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

30. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(1 - \alpha)(1 - \beta) + (2 - \alpha)(2 - \beta) + \cdots + (5 - \alpha)(5 - \beta)$ 의 값을 구하면?

① 50

② 40

③ 10

④ 30

⑤ 20

해설

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -1$$

$$\begin{aligned} &\therefore (1 - \alpha)(1 - \beta) + (2 - \alpha)(2 - \beta) + \cdots + (5 - \alpha)(5 - \beta) \\ &= (1 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta) + \{4 - 2(\alpha + \beta) + \alpha\beta\} + \cdots + \\ &\quad \{25 - 5(\alpha + \beta) + \alpha\beta\} \\ &= (1 + 4 + 9 + 16 + 25) - (1 + 2 + 3 + 4 + 5)(\alpha + \beta) + 5\alpha\beta \\ &= 55 - 15 \times 2 - 5 = 55 - 30 - 5 = 20 \end{aligned}$$