1. 수열 $\log 3, \log 9, \log 27, \cdots$ 의 제 101 항은?

① $10\log 3$　② $99\log 3$　③ $100\log 3$

[✓ ④ $101\log 3$]　⑤ $102\log 3$

해설

$a_1 = \log 3$

$a_2 = \log 9 = 2\log 3$

$a_3 = \log 27 = 3\log 3$

$\vdots$

$a_n = n\log 3$

$\therefore a_{101} = 101\log 3$

2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 72$일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{24}$의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 432

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 4a + 46d = 72$

$2a + 23d = 36$

$$\begin{aligned} \therefore\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{24} &= \frac{24(2a + 23d)}{2} \\ &= 12 \times 36 \\ &= 432 \end{aligned}$$

3. 제 3 항이 12 이고 제 6 항이 -96 인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$

② $(-3) \cdot 2^{n-1}$

[✓ ③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$]

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$

⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$a_3 = ar^2 = 12$

$a_6 = ar^5 = -96$

$r^3 = -8$

$\therefore r = -2$

$ar^2 = 4a = 12 \quad \therefore a = 3$

$\therefore a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

4. 등차수열을 이루는 세 수에 대하여 세 수의 합이 15이고, 제곱의 합은 91일 때, 세 수의 곱은?

[✓ ①] 85 ② 90 ③ 95 ④ 100 ⑤ 105

해설

세 수를 $5-d,\ 5,\ 5+d$라 할 수 있다.

$(5-d)^2+5^2+(5+d)^2=91$

$75+2d^2=91$

$2d^2=16$

$d=\pm 2\sqrt{2}$

(i) $d=2\sqrt{2}$일 때

세수 : $5-2\sqrt{2},\ 5,\ 5+2\sqrt{2}$

$\therefore (5-2\sqrt{2})\times 5\times(5+2\sqrt{2})$

$=(25-8)\times 5=17\times 5=85$

(ii) $d=-2\sqrt{2}$일 때

세 수 : $5+2\sqrt{2},\ 5,\ 5-2\sqrt{2}$

$\therefore (5+2\sqrt{2})\times 5\times(5-2\sqrt{2})$

$=(25-8)\times 5=85$

$\therefore 85$

5. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = 2n^2 - 25$으로 표시되는 수열 $\{a_n\}$의 음수인 항의 합은?

① -75　② -76　③ -77　[✓ ④ -78]　⑤ -79

해설

(i) $n \geq 2$일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 - 25n) - \left\{2(n-1)^2 - 25(n-1)\right\} \\ &= 4n - 27 \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$일 때

$a_1 = S_1$ 이므로 $a_1 = -23$

(i), (ii)에서 $a_n = 4n - 27$ $(n \geq 1)$

한편, $a_n = 4n - 27 < 0$에서 $n < \dfrac{27}{4} = 6.75$

따라서 첫째항부터 제 6항까지가 음수인 항이므로 음수인 항의 합은

$$S_6 = \frac{6}{2}\left\{2 \times (-23) + (6-1) \times 4\right\} = -78$$

6. 9와 144 사이에 세 자연수를 넣어서 이들 5개의 수가 등비수열을 이루도록 할 때, 사이에 들어갈 세 수 중 가장 큰 수는?

① 36　② 45　③ 54　④ 63　[✓ ⑤ 72]

해설

첫째항을 9, 공비를 r이라 하면 사이에 들어갈 세 자연수를 각각 $9r$, $9r^2$, $9r^3$으로 놓을 수 있다.
이때, $9r^4 = 144$이므로 $r^4 = 16$
$r^4 - 16 = 0$, $(r^2 + 4)(r^2 + 2)(r^2 - 2) = 0$
그런데 세 수는 자연수이므로 $r = 2$
따라서 세 수는 18, 36, 72이고, 이 중 가장 큰 수는 72이다.

7. 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각 a, b, c인 직육면체에 대하여 a, b, c는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이 직육면체의 모서리의 길이의 총합이 60, 겉넓이가 180일 때, 이 직육면체의 부피는?

① 174 ② 188 ③ 202 [✓ ④ 216] ⑤ 230

해설

등비수열 a, b, c의 공비를 r이라 하면 가로의 길이, 세로의 길이, 높이는 각각 a, ar, ar^2이다.
모서리의 길이의 총합은 $4(a+ar+ar^2)=60$에서
$a(1+r+r^2)=15\cdots$㉠
또, 겉넓이는 $2(a\cdot ar+a\cdot ar^2+ar\cdot ar^2)=180$에서
$a^2r(1+r+r^2)=90\cdots$㉡
㉡÷㉠에서 $ar=6$
따라서 직육면체의 부피 V는
$V=a\cdot ar\cdot ar^2=a^3r^3=(ar)^3=6^3=216$

8. $\sum_{k=2}^{n+1}(k^2+k+1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-k-1)$ 을 n에 관한 식으로 나타낸 것은?

① n^2+5n-1 [✓ ② $3n^2+5n-1$] ③ $4n^2+2n-1$

④ $4n^2+5n-1$ ⑤ $5n^2+5n-1$

해설

$\sum_{k=2}^{n+1}(k^2+k+1)-\sum_{k=2}^{n-1}(k^2-k-1)$

$=\sum_{k=2}^{n}(k^2+k+1)+\left\{(n+1)^2+(n+1)+1\right\}-3-\left\{\sum_{k=1}^{n}(k^2-k-1)-(n^2-n-1)\right\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left\{(k^2+k+1)-(k^2-k-1)\right\}+n^2+2n+1+n+2-3+n^2-n-1$

$=\sum_{k=1}^{n}(2k+2)+2n^2+2n-1$

$=2\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}+2n+2n^2+2n-1$

$=3n^2+5n-1$

9. $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}k\right)=364$를 만족하는 n의 값은?

① 10 ② 11 [✓ ③ 12] ④ 13 ⑤ 14

해설

$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}k\right)=\sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{l(l+1)}{2}\right\}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}(l^2+l)$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

$=364=2^2\times7\times13$

$\therefore\ n(n+1)(n+2)=6\times2^2\times7\times13=12\times13\times14$

따라서 $n=12$

10. $1 \cdot 20 + 2 \cdot 19 + 3 \cdot 18 + \cdots + 20 \cdot 1$ 의 값은?

① 1102　② 1214　③ 1368　[✓ ④ 1540]　⑤ 1748

해설

$1 \cdot 20 + 2 \cdot 19 + 3 \cdot 18 + \cdots + 20 \cdot 1$
$= \sum_{k=1}^{20} k(21-k) = \sum_{k=1}^{20}(21k - k^2)$
$= 21\sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} k^2$
$= 21 \cdot \dfrac{20 \cdot 21}{2} - \dfrac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6}$
$= 4410 - 2870 = 1540$

11. 등차수열 $2,\ 5,\ 8,\ \cdots,68$의 합을 기호 $\sum$를 써서 나타내면 $\sum_{k=1}^{n}(ak+b)$이다. 이때 상수 $a,\ b,\ n$의 합 $a+b+n$의 값은? (단,n은 자연수이다.)

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 [✓ ⑤ 25]

해설

주어진 등차수열은 첫째항이 2, 공차가 3이므로 일반항 a_n은

$a_n = 2 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 1$

이때, $3n - 1 = 68$에서

$3n = 69 \quad \therefore n = 23$

즉, $2 + 5 + 8 + \cdots + 68 = \sum_{k=1}^{23}(3k-1)$

$\therefore a = 3,\ b = -1,\ n = 23$

$\therefore a + b + n = 3 - 1 + 23 = 25$

12. $\sum_{k=1}^{10} \left[\frac{100}{k}\right]$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지않는 최대의 정수)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 291

해설

$\sum_{k=1}^{10} \left[\frac{100}{k}\right] = 100+50+33+25+20+16+14+12+11+10 =$ 291

13. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n = (7^n$을 10으로 나눈 나머지$)$로 정의할 때, $\sum_{n=1}^{2014} a_n$의 값은?

① 10071
② 10073
③ 10075
[✓ ④ 10076]
⑤ 10079

해설

$\{a_n\} : 7,\ 9,\ 3,\ 1,\ 7,\ 9,\ 3,\ 1,\ 7, \cdots$
으로 4항마다 같은 항이 반복된다.
$2014 = 4 \times 503 + 2$이므로
$\sum_{n=1}^{2014} a_n = \sum_{n=1}^{503}(7+9+3+2) + a_1 + a_2$
$= \sum_{n=1}^{503} 20 + 7 + 9 = 20 \times 503 + 16 = 10076$

14. $\sqrt[4]{402+2\sqrt{401}}\cdot\sqrt[4]{402-2\sqrt{401}}$ 의 값은?

[✓ ① 20]　② $\sqrt{401}$　③ $\sqrt{402}$　④ $\sqrt[4]{401}$　⑤ $\sqrt[4]{402}$

해설

$$\sqrt[4]{402+2\sqrt{401}}\cdot\sqrt[4]{402-2\sqrt{401}}$$
$$=\sqrt[4]{(\sqrt{401}+1)^2}\cdot\sqrt[4]{(\sqrt{401}-1)^2}$$
$$=\sqrt{\sqrt{401}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{401}-1}=\sqrt{401-1}=20$$

15. 다음 식의 값을 구하여라.

$$\boxed{\log_{10} 2+\log_{10}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{10}\left(1+\frac{1}{99}\right)}$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$\log_{10} 2\cdot(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{99})$

$=\log_{10}\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{99}{98}\cdot\frac{100}{99}$

$=\log_{10} 100=2$

16. $\log_2 14$의 소수부분을 $a(0 \leq a < 1)$이라 할 때, 2^{a+2}의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 7

해설

$\log_2 14 = 1 + \log_2 7$

$\log_2 4 < \log_2 7 < \log_2 8$

$2 < \log_2 n < 3$

정수 부분 : $1 + 2 = 3$

소수 부분 : $\log_2 14 - 3 = \log_2 \frac{14}{8} = a$

$a + 2 = a + \log_2 4$

$= \log_2 \frac{14}{8} \cdot 4 = \log_2 \frac{14}{2} = \log_2 7$

$2^{a+2} = 2^{\log_2 7} = 7$

17. $\log_5 2 = a, \log_5 3 = b$라 할 때, $\log_{24} \sqrt{18}$을 a, b를 사용하여 나타낸 것은?

① $\dfrac{a+2b}{2(a+3b)}$ [✓ ②] $\dfrac{a+2b}{2(3a+b)}$ ③ $\dfrac{2a+b}{2(3a+b)}$

④ $\dfrac{2(a+2b)}{3a+b}$ ⑤ $\dfrac{2(2a+b)}{a+3b}$

해설

$\log_{24} \sqrt{18} = \dfrac{\log_5 \sqrt{18}}{\log_5 24}$ 에서

$\log_5 \sqrt{18} = \dfrac{1}{2} \log_5 18 = \dfrac{1}{2} \log_5 (2 \cdot 3^2)$

$= \dfrac{1}{2} (\log_5 2 + 2 \log_5 3) = \dfrac{1}{2} (a + 2b)$

$\log_5 24 = \log_5 (2^3 \cdot 3) = 3 \log_5 2 + \log_5 3 = 3a + b$

$\therefore \log_{24} \sqrt{18} = \dfrac{\log_5 \sqrt{18}}{\log_5 24} = \dfrac{\frac{1}{2}(a+2b)}{3a+b} = \dfrac{a+2b}{2(3a+b)}$

18. $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 일 때, $\dfrac{a}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

로그의 성질을 이용하여 주어진 식 $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 을 간단히 정리하면

$\log(a-2b)^2 = \log 2b(62b-a)$

$(a-2b)^2 = 2b(62b-a)$

$a^2 - 4ab + 4b^2 = 124b^2 - 2ab$

$a^2 - 2ab - 120b^2 = 0$

$(a+10b)(a-12b) = 0$

$\therefore\ a = -10b$ 또는 $a = 12b$

이때 진수 조건에 의하여 $a-2b>0,\ 2b>0,\ 62b-a>0$ 이므로

$a>0,\ b>0$

따라서 $a = 12b$ 이고 $\dfrac{a}{b} = 12$ 이다.

19. $a,\ b,\ c$는 $1 < a < b < c < 9$인 정수이고, 수열 $0.a,\ 0.0b,\ 0.00c,\ \cdots$ 가 등비수열일 때, 이 수열의 제 4항은?

① $0.00\dot{1}\dot{5}$　② $0.00\dot{1}\dot{6}$　③ $0.001\dot{6}$

[✓ ④] $0.001\dot{7}$　⑤ $0.00\dot{1}\dot{7}$

해설

$0.\dot{a} = \frac{a}{9},\ 0.0\dot{b} = \frac{b}{90},\ 0.00\dot{c} = \frac{c}{900}$ 이므로

$\left(\frac{b}{90}\right)^2 = \frac{a}{9} \times \frac{c}{900}$ 에서 $b^2 = ac$

즉, $a,\ b,\ c$는 이 순서로 등비수열을 이루고
$1 < a < b < c < 9$인 정수이므로 $a = 2,\ b = 4,\ c = 8$ 이다.

따라서 이 수열은 $\frac{2}{9},\ \frac{4}{90},\ \frac{8}{900},\cdots$ 이므로

첫째항이 $\frac{2}{9}$ 이고, 공비가 $\frac{2}{10}$ 인 등비수열이다.

$\therefore a_4 = \frac{16}{9000} = 0.001\dot{7}$

20. $a > 0$이고 $t = \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}})$일 때, $(t + \sqrt{t^2+1})^3$을 a에 관한 식으로 나타내면?

① a^2 [✓ ② a] ③ $\frac{1}{a}$ ④ $\sqrt{a}$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{a}}$

해설

$$t + \sqrt{t^2+1} = \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}})^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{2}{3}} - 2 + a^{-\frac{2}{3}}) + 1}$$

$$= \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{1}{3}} + 2 + a^{-\frac{1}{3}})^2}$$

$$= \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})^2}$$

$$= \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}) = a^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \quad (t + \sqrt{t^2+1})^3 = (a^{\frac{1}{3}})^3 = a$$

21. $\dfrac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2$일 때, $\dfrac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}}$의 값은?

① $\dfrac{2}{3}$ ② $\dfrac{3}{4}$ [✓ ③ $\dfrac{5}{4}$] ④ $\dfrac{6}{5}$ ⑤ $\dfrac{7}{6}$

해설

$\dfrac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2$에서

$a^x + a^{-x} = 2(a^x - a^{-x}) = 2a^x - 2a^{-x}$

$a^x = 3a^{-x}$이므로 $a^{2x} = 3$

$$\therefore \frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{5}{4}$$

22. 자연수 A에 대하여 A^{20}이 45자리 자연수일 때, $\left(\frac{A}{10}\right)^{10}$의 정수 부분의 자리 수는?

[✓ ① 13자리]　② 14자리　③ 15자리
④ 16자리　⑤ 17자리

해설

$$A^{20} = \left(\frac{A}{10}\right)^{20} \times 10^{20}$$

$$\log A^{20} = \log\left(\frac{A}{10}\right)^{20} + 20 = 2\log\left(\frac{A}{10}\right)^{10} + 20$$

$$44 \leq 2\log\left(\frac{A}{10}\right)^{10} + 20 < 45$$

$$24 \leq 2\log\left(\frac{A}{10}\right)^{10} < 25$$

$$12 \leq \log\left(\frac{A}{10}\right)^{10} < 12.5$$

따라서 $\log\left(\frac{A}{10}\right)^{10}$의 지표가 12이므로

$\left(\frac{A}{10}\right)^{10}$은 13자리의 수이다.

23. 다음은 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하고 $S_n = p$, $S_{2n} = q$라 할 때, S_{3n}을 p, q로 나타내는 과정이다. (단, $p \neq 0, q \neq 0$)

> 자연수 n에 대하여
> $A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$
> $B = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{2n}$
> $C = a_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} + \cdots + a_{3n}$이라 하자.
> 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 A, B, C는 이 순서대로 공비가 [(가)]인 등비수열을 이룬다.
> 등비중항의 성질에 의하여 $B^2 = AC$
> 또한, $\begin{cases} A = S_n = p \\ B = S_{2n} - S_n = q - p \\ C = S_{3n} - S_{2n} = S_{3n} - q \end{cases}$
> 따라서 $S_{3n} = $ [(나)]이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : r^{n-1}, (나) : $\dfrac{(p-q)^2}{p}$

② (가) : r^n, (나) : $\dfrac{(p+q)^2}{p}$

[✓ ③] (가) : r^n, (나) : $\dfrac{p^2-pq+q^2}{p}$

④ (가) : r^n, (나) : $\dfrac{p^2+pq+q^2}{p}$

⑤ (가) : r^{2n}, (나) : $\dfrac{p^2-pq+q^2}{p}$

해설

$A = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$, $B = \dfrac{ar^n(r^n-1)}{r-1}$, $C = \dfrac{ar^{2n}(r^n-1)}{r-1}$

이므로 A, B, C는 공비가 $[r^n]$인 등비수열이고 A, B, C를 $B^2 = AC$에 대입하여 정리하면

$(q-p)^2 = p(S_{3n} - q)$

$\therefore\ S_{3n} = [\dfrac{p^2-pq+q^2}{p}]$

$\therefore$ (가) $= r^n$, (나) $= \dfrac{p^2-pq+q^2}{p}$

24. 양수 x에 대하여 $\log x$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. 두 등식 $f(a) = f(b) + 2$, $g(a) = g(b) + \log 3$을 만족시키는 두 양수 a, b에 대하여 $3a + \frac{25}{b}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

$\log x = f(x) + g(x)$ 이므로
$\log a = f(a) + f(a) \cdots\cdots$ ㉠
$\log b = f(b) + f(b) \cdots\cdots$ ㉡
㉠ – ㉡에서

$$\begin{aligned}\log a - \log b &= f(a) - f(b) + g(a) - g(b)\\ &= 2 - \log 3\end{aligned}$$

이므로 $\log \frac{a}{b} = \log \frac{100}{3}$, $\frac{a}{b} = \frac{100}{3}$
$\therefore 3a = 100b$
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3a + \frac{25}{b} = 100b + \frac{25}{b} \geq 2\sqrt{100b \times \frac{25}{b}} = 100$$

(등호는 $a = \frac{50}{3}$, $b = \frac{1}{2}$일 때 성립한다.)
$\therefore$ 구하는 최솟값은 100이다.

25. 다음 두 조건을 동시에 만족시키는 자연수 x의 개수를 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

㉠ $200 \le x \le 300$

㉡ $[\log_2 x] = [\log_3 x] + \log_4 x$

▶ 답 :

▷ 정답 : 43

해설

$200 \le x \le 300$이므로 $7 < \log_2 x < 9$
(i) $7 < \log_2 x < 8$ 즉, $200 \le x < 256$일 때,
$[\log_2 x] = 7,\ [\log_4 x] = [\frac{1}{2}\log_2 x] = 3$이므로 $[\log_3 x] = 4$
$\therefore 4 \le \log_3 x < 5,\ 200 \le x < 243$
(ii) $8 < \log_2 x < 9$ 즉, $256 \le x \le 300$일 때, $[\log_2 x] = 8, [\log_4 x] = 8, [\log_3 x] = 5$이므로 조건 (나)를 만족하는 자연수는 없다.
(i), (ii)에서 자연수 x는 43개이다.