1. $a^2+b^2+c^2=9,\ ab+bc+ca=9,\ a+b+c$의 값은?

① $-3\sqrt{2}$ ② $-2\sqrt{3}$ ③ $\pm 3\sqrt{3}$

④ $\pm 3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$
$$= 9+18 = 27$$

$\therefore\ a+b+c = \pm 3\sqrt{3}$

2. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$을 이용하여 $\dfrac{1999^3+1}{1998\times 1999+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2000

해설

$a=1999$라 하면

$1998\times 1999+1=(a-1)a+1=a^2-a+1$

$\therefore \dfrac{1999^3+1}{1998\times 1999+1}=\dfrac{a^3+1}{a^2-a+1}$

$=\dfrac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$

$=a+1=2000$

3. 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2y+3z=-2 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3z+x=-5 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$ 를 풀면 $x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ 이다.

이때, $\alpha\beta\gamma$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 세 식을 변변끼리 더하면

$2(x+2y+3z)=-2$, 즉 $x+2y+3z=-1$ $\cdots\cdots ㉣$

㉣ − ㉡을 하면 $x=1$

㉣ − ㉢을 하면 $y=2$

㉣ − ㉠을 하면 $z=-2$

$\therefore\ \alpha\beta\gamma=xyz=-4$

4. 수직선 위의 두 점 $A(-3)$, $B(6)$에 대하여 선분 AB를 $2 : 1$로 내분하는 점을 P, $3 : 2$로 외분하는 점을 Q라 한다. 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 21

해설

$\dfrac{2\times 6+1\times(-3)}{2+1}=3$에서 $P(3)$

$\dfrac{3\times 6-2\times(-3)}{3-2}=24$에서 $Q(24)$

$\therefore\ \overline{PQ}=|24-3|=21$

5. 세 점 A $(1,5)$, B $(-4,-7)$, C $(5,2)$가 좌표평면 위에 있다. $\triangle ABC$에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 점 D의 좌표를 구하면?

① $(0,0)$ ② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$\overline{AB} = 13$, $\overline{AC} = 5$

따라서 $\overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$

D는 B, C를 $13:5$로 내분한 점

$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

6. 중심이 직선 $y = x + 2$ 위에 있고, 점 $(4,\ 4)$ 를 지나며, y축에 접하는 원 중 반지름의 크기가 작은 원의 방정식을 구하면?

① $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$

② $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$

③ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$

④ $(x-10)^2 + (y-12)^2 = 100$

⑤ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 100$

해설

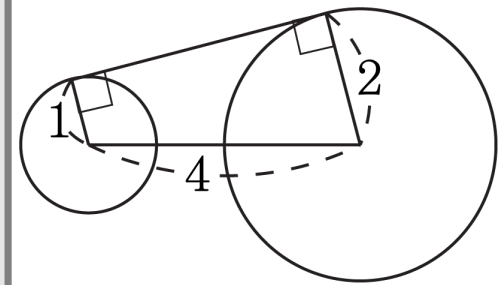
원의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2$ 으로 놓으면
중심 (a, b) 가 $y = x + 2$
위에 있으므로
$b = a + 2$ ····· ㉠
점 $(4, 4)$ 를 지나므로
$(4-a)^2 + (4-b)^2 = a^2$ ····· ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $(4-a)^2 + (4-a-2)^2 = a^2$
$a^2 - 12a + 20 = 0 \quad \therefore\ a = 2, 10$
$\therefore\ a = 2$일 때 $b = 4$, $a = 10$일 때 $b = 12$
따라서 구하는 방정식은
$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$,
$(x-10)^2 + (y-12)^2 = 100$

7. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-4)^2+y^2=4$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 0 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

두 원의 중심간 거리는 4이다.
피타고라스의 정리에 의해 공통외접선의 길이를 구하면
$\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$ 이다.



8. 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 중심이 $(-1,-3)$ 이고 반지름의 길이가 2 일 때, 상수 a,b,c 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 을 x 축에 대하여
대칭이동한 원의 방정식은
$x^2+y^2+ax-by+c=0$
이 때, 이 원의 중심이 $(-1,-3)$ 이고
반지름의 길이가 2 이므로
$x^2+y^2+ax-by+c=0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+3)^2=4$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x+6y+6=0$
$\therefore a=2,\ b=-6,\ c=6$
따라서, 구하는 $a,\ b,\ c$ 의 값의 합은
$2+(-6)+6=2$

9. 다음 보기 중 항상 옳다고 할 수 없는 등식은?

㉠ $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

㉡ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

㉢ $(x^2+x+1)(x^2-x-1)=x^4+x+1$

㉣ $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

㉤ $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

㉢ $x+1=A$로 치환하여 전개하면

$(x^2+A)(x^2-A)=x^4-A^2=x^4-x^2-2x-1$

10. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $3 + \sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a + b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

한근이 $3 + \sqrt{2}$이므로 켤레근인 $3 - \sqrt{2}$도 근이 된다.
이차방정식의 두 근의 합이 $-a$이므로,
$-a = (3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 6 \quad \therefore\ a = -6$
두근의 곱이 b이므로
$b = (3 + \sqrt{2}) \cdot (3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7 \quad \therefore\ b = 7$
$\therefore\ a + b = -6 + 7 = 1$

11. 다음 방정식을 만족하는 실수 $x,\ y$의 합을 구하여라.

$$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: -3

▷ 정답: 3

해설

$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$에서 $x^2y^2+4x^2+y^2+4-8xy=0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면
$(x^2y^2-4xy+4)+(4x^24xy+y^2)=0$
이 때, $x,\ y$가 실수이므로 $xy-2,\ 2x-y$도 실수이다.
$\therefore xy-2=0 \quad \cdots$㉠,
$2x-y=0 \quad \cdots$㉡
㉡에서 $y=2x$이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2=1$
따라서, $x=1$일 때 $y=2$, $x=-1$일 때 $y=-2$
그러므로 $x,\ y$의 값은 $x=\pm1,\ y=\pm2$(복부호 동순)
따라서 $x,\ y$의 합은 $-3, 3$

12. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 6일 때, 이차방정식 $f(4x-1)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 6

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$
$f(4x-1)$는 $f(x)$의 x대신 $4x-1$를 대입한 것과 같으므로
$f(4x-1)=k(4x-1-\alpha)(4x-1-\beta)=0$의 근은
$x=\dfrac{\alpha+1}{4}$, $\dfrac{\beta+1}{4}$
$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{\alpha+1+\beta+1}{4}=\dfrac{6+2}{4}=2$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α,β라 하면
$f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$
$f(4x-1)=0$에서
$4x-1=\alpha,\ 4x-1=\beta$
$\therefore x=\dfrac{\alpha+1}{4},\ x=\dfrac{\beta+1}{4},$
$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{\alpha+1+\beta+1}{4}=\dfrac{6+2}{4}=2$

13. 두 직선 $x-3y+5=0$, $x+9y-7=0$ 의 교점을 지나고, x 축의 양의 방향과 $30°$ 의 각을 이루는 직선의 방정식이 $x+by+c=0$ 일 때 $b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 식을 연립하여 풀면 두 직선의 교점의 좌표는

$(-2,\ 1)$ 이고, 기울기는 $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y-1=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$

$\therefore x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}+2=0$

$\therefore b=-\sqrt{3},\ c=2+\sqrt{3}$ $\quad\therefore\ b+c=2$

14. 직선 $ax+by+c=0$에 대하여 $ab<0$, $bc>0$일 때, 이 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$ax+by+c=0$에서

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

주어진 조건에서

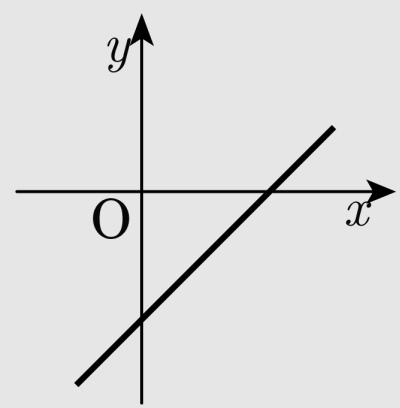
$ab<0$, $bc>0$ 이므로

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$

$\therefore$ (기울기)>0 , (y 절편)<0

따라서 주어진 직선은 다음 그림과 같으므로

지나지 않는 사분면은 제 2 사분면이다.



15. 평행이동 $(x,\ y) \rightarrow (x+a,\ y+b)$ 에 의하여 점 $(3,\ 5)$ 가 점 $(8,\ 20)$ 으로 이동했다고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

점 $(3,\ 5)$ 가 점 $(8,\ 20)$ 으로 이동하려면 x 축 방향으로 $+5$, y 축 방향으로 $+15$ 만큼 평행이동 해야 한다. 따라서 $a=5,\ b=15$

16. 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ 과 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭인 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ ② $(x+1)^2+(y-2)^2=1$

③ $(x+2)^2+(y-1)^2=1$ ④ $(x-2)^2+(y+1)^2=1$

⑤ $x^2+y^2=1$

해설

$y=-x$ 에 대해 대칭이므로
원의 방정식에 x 대신 $-y$ 를, y 대신 $-x$ 를 대입 한다.

$\Rightarrow \quad (-y-1)^2+(-x+2)^2=1$

$\Rightarrow \quad (x-2)^2+(y+1)^2=1$

17. P $(3, 1)$을 직선 $x+y+1=0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 Q (α, β) 라 할 때 $\alpha+\beta$ 의 값은?

① 1 ② -2 ③ -4 ④ -6 ⑤ -8

해설

직선 PQ 가 $x+y+1=0$ 에 수직이므로
기울기는 1 이다.

$$\frac{\beta-1}{\alpha-3}=1 \cdots ㉠$$

점 P, Q 의 중점 $\left(\frac{\alpha+3}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right)$ 이 직선

$x+y+1=0$ 위 에 있으므로

$$\frac{\alpha+3}{2}+\frac{\beta+1}{2}+1=0 \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=-2$, $\beta=-4$
따라서 $\alpha+\beta=-6$ 이다.

18. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)+g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나머지가 2이다. 다음 [보기]의 다항식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

㉠ $x+f(x)$ ㉡ $x-g(x)$
㉢ $x+f(x)g(x)$

① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠,㉡

④ ㉠,㉢ ⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

$f(x)+g(x)=(x+1)Q(x)$
$f(x)-g(x)=(x+1)Q'(x)+2$
$x=-1$ 을 두 식에 각각 대입하면
$f(-1)+g(-1)=0\cdots①$
$f(-1)-g(-1)=2\cdots②$
①, ②을 연립하여 풀면 $f(-1)=1, g(-1)=-1$
보기의 식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것은 $x=-1$ 을 대입하면 식의 값이 0 이 된다.
㉠ $-1+f(-1)=-1+1=0$
㉡ $-1-g(-1)=-1+1=0$
㉢ $-1+f(-1)g(-1)=-1+1\times(-1)=-2$
∴ ㉠, ㉡

19. $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$가 성립할 때,

$\sqrt{(y-x+1)^2} +^3 \sqrt{x^3-y^3-3xy(x-y)} + |x|$를 간단히 하면?

① $x-1$ ② $-x+1$ ③ $2y-3x+1$

④ $3x-2y-1$ ⑤ $-3x-2y-1$

해설

$\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ 일 때, $y \geq 0,\ x < 0$

(준식) $= |y-x+1| +^3 \sqrt{(x-y)^3} + |x|$

$= y-x+1+x-y-x = -x+1$

20. 구간 $0 < x < 5$에서 $x = \dfrac{1}{x - [x]}$를 만족시키는 x의 개수는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

① 2개 ② 3개 ③ 4개

④ 5개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$x - [x] \neq 0$이므로 x는 정수가 아니다.
주어진 식의 양변에 $x - [x]$를 곱하면
$x^2 - x[x] - 1 = 0$
(ⅰ) $0 < x < 1$일 때 $[x] = 0$, $x^2 - 1 = 0$
$\therefore\ x = \pm 1$, 이 값은 $0 < x < 1$에 속하지 않는다.
$\therefore$ 해가 없다.
(ⅱ) $1 < x < 2$일 때 $[x] = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$

$$\therefore\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$1 < x < 2$이므로 $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$
(ⅲ) $2 < x < 3$일 때 $[x] = 2$
$\therefore\ x^2 - 2x - 1 = 0$
$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$
$2 < x < 3$이므로 $x = 1 + \sqrt{2}$
(ⅳ) $3 < x < 4$일 때 $[x] = 3$
$\therefore\ x^2 - 3x - 1 = 0$

$$\therefore\ x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$3 < x < 4$이므로 $x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$
(ⅴ) $4 < x < 5$일 때 $[x] = 4$
$\therefore\ x^2 - 4x - 1 = 0$
$x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$
$4 < x < 5$이므로 $x = 2 + \sqrt{5}$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ), (ⅴ)에서 x의 개수는 4개

21. 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$ 을 풀 때, 근우는 b 를 잘못보고 풀어서 $1 < x < 3$ 이라는 해를 얻었고, 기원이는 a 를 잘못보고 풀어서 $-2 < x < 4$ 이라는 해를 얻었다. 이 부등식의 옳은 해는?

① $-1 < x < 2$

② $-2 < x < 3$

③ $2 - 2\sqrt{5} < x < 2 + 2\sqrt{5}$

④ $1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$

⑤ $2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

해설

$1 < x < 3 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$

$\therefore a = -4$

$-2 < x < 4 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) < 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 < 0$

$\therefore b = -8$

$x^2 - 4x - 8 < 0$

$\therefore 2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

22. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+2y+z=k \\ x+y+2z=2k^2 \end{cases}$ 의 해 x, y, z가 모두 양수일 때, k의 값의 범위는?

① $-\frac{3}{2} < k < 0$ ② $1 < k < \frac{3}{2}$ ③ $\frac{1}{2} < k < \frac{3}{4}$

④ $-2 < k < -\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2} < k < 1$

해설

i) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \cdots ㉠ \\ x+2y+z=k \cdots ㉡ \\ x+y+2z=2k^2 \cdots ㉢ \end{cases}$ 라 하면

㉠ $\times 3 -$ ㉡ $-$ ㉢에서

$4x = -2k^2 - k + 3$

$= -(2k+3)(k-1) > 0 \cdots ㉣$

㉡ $\times 3 -$ ㉢ $-$ ㉠에서

$4y = -2k^2 + 3k - 1$

$= -(2k-1)(k-1) > 0 \cdots ㉤$

㉢ $\times 3 -$ ㉠ $-$ ㉡에서

$4z = 6k^2 - k - 1$

$= (3k+1)(2k-1) > 0 \cdots ㉥$

ii) ㉣에서 $-\frac{3}{2} < k < 1$

㉤에서 $\frac{1}{2} < k < 1$

㉥에서 $k < -\frac{1}{3}, k > \frac{1}{2}$

이들의 공통부분은 $\frac{1}{2} < k < 1$

23. 방정식 $x^3 - 3x + 1 = 0$의 한 근을 α, $x^2 - \alpha x + 1 = 0$의 한 근을 β라 할 때, $\beta^3 + \frac{1}{\beta}^3$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0$에서 $\alpha^3 - 3\alpha = -1$

$\beta^2 - \alpha\beta + 1 = 0$에서 양변을 β로 나누면

$$\beta + \frac{1}{\beta} = \alpha (\because \beta \neq 0)$$

$$\therefore \beta^3 + \frac{1}{\beta}^3 = \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^3 - 3\beta \cdot \frac{1}{\beta}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$= \alpha^3 - 3\alpha = -1$$

24. 직선 $y=-2x+2$에 접하는 이차함수 $y=x^2+ax+b$가 x축에 의해서 잘려진 선분의 길이가 2일 때, $a+b$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

포물선과 직선의 교점의 x좌표를 구하는 식은

$x^2+ax+b=-2x+2$ $x^2+(a+2)x+b-2=0$

두 그래프가 접하므로 이 방정식을 중근을 갖는다.

$\mathrm{D}=(a+2)^2-4(b-2)=0$

$\therefore\ b=\frac{1}{4}(a^2+4a+12)$ $\cdots$ ㉠

포물선과 x축과의 교점의 x좌표를 구하는 식은

$x^2+ax+b=0$이 방정식의 두 근을 α, β라 하면

$|\alpha-\beta|=2$이므로 $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=4$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=a^2-4b=4$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2-(a^2+4a+12)=4$

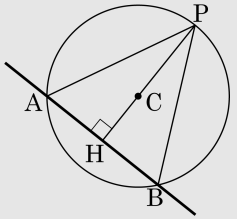
$\therefore\ a=-4,\ b=3$ $\therefore\ a+b=-1$

25. 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$와 직선 $3x+4y-1=0$이 만나는 두 점을 각각 A, B, 원 위의 한 점을 P라 할 때, $\triangle PAB$의 넓이의 최댓값을 구하면?

① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{5}$

해설

원 위의 점 P에서 직선 $3x+4y-1=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 다음 그림과 같이 $\overline{PH}$가 원의 중심을 지날 때, $\triangle PAB$의 넓이가 최대이다.



이 때, 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$의 중심 $C(1,2)$에서 직선 $3x+4y-1=0$에 이르는 거리는

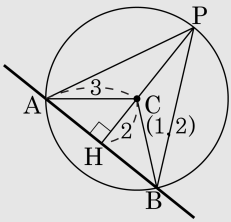
$$\overline{CH}=\frac{|3\cdot 1+4\cdot 2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

$\therefore \overline{PH}=3+2=5$

또, 다음 그림에서 $\triangle CAH$는 직각삼각형이므로 피타고라스정리에 의하여

$\overline{AH}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{5}$

따라서, $\triangle PAB$의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 5=5\sqrt{5}$$