1. 다항식 $x^3 + ax + b$ 가 다항식 $x^2 - x + 1$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
 $x^2 = x - 1$ 을 대입하면
 $ax + (b - 1) = 0$
이 등식이 x 에 대한 항등식이므로,
 $a = 0, b - 1 = 0$
 $\therefore a = 0, b = 1$
 $\therefore a + b = 1$

해설

$x^3 + ax + b$
 $= (x^2 - x + 1)Q(x)$
 $= (x^2 - x + 1)(x + b)$
 $\therefore b = 1, a = 0$

2. 다항식 $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 12$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지고 또, $x - 3$ 으로도 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -5

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지려면

$$f(2) = 24 + 4a + 2b + 12 = 0$$

$$\therefore 4a + 2b + 36 = 0 \quad \text{.....} \textcircled{A}$$

또, $f(x)$ 가 $x - 3$ 으로 나누어 떨어지려면

$$f(3) = 81 + 9a + 3b + 12 = 0$$

$$\therefore 9a + 3b + 93 = 0 \quad \text{.....} \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a = -13$, $b = 8$

3. x 에 대한 다항식 $x^3 - 2x^2 - x + 2$ 가 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 로 인수분해될 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은? (단, a, b, c 는 상수)

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (-1)^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$

4. 등식 $x^3 + x - 1 = (x-a)(x-b)(x-c)$ 가 항등식일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 5 ③ 3 ④ 7 ⑤ -7

해설

$$\begin{aligned}x^3 + x - 1 &= (x-a)(x-b)(x-c) \\ &= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc \\ \therefore a+b+c &= 0, ab+bc+ca = 1, abc = 1 \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc & \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca) \\ \therefore a^3 + b^3 + c^3 &= 3\end{aligned}$$

5. $f(x)$ 가 x 의 다항식일 때 $(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 가 x 에 대한 항등식이 될 때 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -7

해설

$$(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b \text{에서}$$

$$x^2 = 2 \text{를 대입하면 } 0 = 16 + 4a + b \cdots \textcircled{1}$$

$$x^4 = -1 \text{을 대입하면 } 0 = 1 - a + b \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{를 연립하여 풀면 } a = -3, b = -4$$

$$\therefore a + b = -7$$

6. k 의 값에 관계없이 $(2k^2 - 3k)x - (k + 2)y - (k^2 - 4)z = 28$ 이 항상 성립하도록 x, y, z 의 값을 정할 때, $3x + y + z$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

주어진 식을 k 에 대해 정리하면
 $(2x - z)k^2 - (3x + y)k - (2y - 4z + 28) = 0$
 $\therefore 2x - z = 0, 3x + y = 0, 2y - 4z + 28 = 0$
 $z = 2x, y = -3x$ 을 $2y - 4z + 28 = 0$ 에 대입하면
 $x = 2, y = -6, z = 4$
 $\therefore 3x + y + z = 4$

7. 두 다항식 $f(x) = x^2 + 3x + a$, $g(x) = x^3 + ax$ 를 $x+2$ 로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

해설

$f(x) = x^2 + 3x + a$, $g(x) = x^3 + ax$ 에서
 $f(-2) = g(-2)$ 이므로
 $4 - 6 + a = -8 - 2a$
 $\therefore a = -2$

8. x 에 대한 다항식 $2x^3 - 5x^2 + ax + b$ 가 다항식 $x^2 - x + 2$ 로 나누어떨어지도록 상수 a, b 의 값을 정하면?

① $a = 7, b = -6$ ② $a = 6, b = -5$ ③ $a = 5, b = -3$

④ $a = 4, b = -5$ ⑤ $a = 3, b = 7$

해설

직접 나누면

몫이 $2x - 3$, 나머지가 $(a - 7)x + b + 6$ 이므로

$$2x^3 - 5x^2 + ax + b$$

$$= (x^2 - x + 2)(2x - 3) + (a - 7)x + b + 6$$

$x^2 - x + 2$ 로 나누어떨어지기 위해서는 나머지가 0이어야 하므로

$$(a - 7)x + b + 6 = 0$$

$$\therefore a = 7, b = -6$$

9. $f(x)$ 를 $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지가 각각 3, 5일 때, $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나눈 나머지를 구하면?

① $2x+1$

② $2x+3$

③ $2x-1$

④ $2x$

⑤ $2x-3$

해설

x^2-3x+2 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ 라 하면 $f(x) = (x^2-3x+2)Q(x) + ax+b$
그런데 $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ 이므로
 $a+b = 3$, $2a+b = 5$
 $\therefore a = 2$, $b = 1$
따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

10. 다항식 $(x+2)f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 9, 다항식 $(2x-3)f(3x-7)$ 을 $x-3$ 으로 나눈 나머지가 -3 이다. 이때 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나눈 나머지는?

- ㉠ $-4x+7$ ㉡ $-4x-3$ ㉢ $2x+3$
㉣ $2x-3$ ㉤ $3x-1$

해설

나머지정리에 의하여

$(x+2)f(x)$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$3f(1) = 9 \text{이므로 } f(1) = 3 \cdots \text{㉠}$$

$(2x-3)f(3x-7)$ 에 $x=3$ 을 대입하면

$$3f(2) = -3 \text{이므로 } f(2) = -1 \cdots \text{㉡}$$

$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$ 에 ㉠, ㉡을 대입하면

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$$

이므로 $a = -4, b = 7$

11. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 - x + b$ 를 $x-3$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $a + b + c + d + k$ 의 값을 구하면?

$$\begin{array}{r|rrrr} k & 1 & a & -1 & b \\ & & c & d & 33 \\ \hline & 1 & 4 & 11 & \underline{37} \end{array}$$

- ① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

해설

다항식 $x^3 + ax^2 - x + b$ 를 $x-3$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & a & -1 & b \\ & & 3 & 3a+9 & 9a+24 \\ \hline & 1 & a+3 & 3a+8 & \underline{9a+b+24} \end{array}$$

이때 $k = 3$, $c = 3$, $a + 3 = 4$, $3a + 9 = d$, $9a + b + 24 = 37$

이므로

$$k = 3, c = 3, a = 1, d = 12, b = 4$$

$$\text{따라서 } a + b + c + d + k = 1 + 4 + 3 + 12 + 3 = 23$$

12. 다음 중 $(x+y)^3 - 8y^3$ 의 인수인 것은?

① $x^2 - 2xy - 4y^2$ ② $x^2 - 2xy + 4y^2$ ③ $x^2 + 2xy + 4y^2$

④ $x^2 - 4xy - 7y^2$ ⑤ $x^2 + 4xy + 7y^2$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x+y)^3 - (2y)^3 \\ &= \{(x+y) - 2y\} \{(x+y)^2 + (x+y)2y + (2y)^2\} \\ &= (x-y)(x^2 + 2xy + y^2 + 2xy + 2y^2 + 4y^2) \\ &= (x-y)(x^2 + 4xy + 7y^2)\end{aligned}$$

13. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$$\begin{aligned}x^2 + x &= A \text{로 치환하면} \\(x-3)(x-1)(x+2)(x+4) + 24 \\&= \{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\} + 24 \\&= (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 12) + 24 \\&= (A-2)(A-12) + 24 \\&= A^2 - 14A + 48 = (A-6)(A-8) \\&= (x^2 + x - 6)(x^2 + x - 8) \\&= (x-2)(x+3)(x^2 + x - 8) \\ \therefore a+b+c-d &= -2+3+1-(-8) = 10\end{aligned}$$

14. 다항식 $x^4 + x^2y^2 + 25y^4$ 을 인수분해 하였더니 $(x^2 + mxy + 5y^2)(x^2 + nxy + 5y^2)$ 가 되었다. 이 때 상수 m, n 의 합 $m + n$ 의 값을 구하면?

- ① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4 + 10x^2y^2 + 25y^4 - 9x^2y^2 \\ &= (x^2 + 5y^2)^2 - (3xy)^2 \\ &= (x^2 + 5y^2 - 3xy)(x^2 + 5y^2 + 3xy) \\ \therefore m + n &= 0\end{aligned}$$

15. 서로 다른 세 실수 x, y, z 에 대하여 $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ 를 만족할 때, $x + y + z$ 의 값은?

㉠ 0 ㉡ 1 ㉢ 2 ㉣ 3 ㉤ 4

해설

$$\begin{aligned} & x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0 \\ & (x + y + z) = 0 \text{ 또는 } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0 \\ & \therefore x + y + z = 0 \text{ 또는 } \frac{1}{2}((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2) = 0 \\ & \text{그런데 } x, y, z \text{가 서로 다른 세 실수 } (x \neq y \neq z) \text{ 이므로} \\ & x + y + z = 0 \end{aligned}$$

17. $\frac{2012^3 + 1}{2012 \times 2011 + 1}$ 의 값을 a 라 할 때, $\frac{a+1}{a-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{1007}{1006}$

해설

$$\begin{aligned} a &= \frac{(2012+1)(2012^2-2012+1)}{(2012^2-2012+1)} \\ &= 2013 \text{ 이므로} \\ \therefore \frac{a+1}{a-1} &= \frac{2013+1}{2013-1} = \frac{2014}{2012} = \frac{1007}{1006} \end{aligned}$$

18. $x = 1001$ 일 때, $\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

19. $x + y + 2z = 1$, $2x - y + z = 5$ 를 만족하는 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 6$ 이 성립할 때, $3a + 2b + c$ 의 값은 얼마인가?

- ① 12 ② 8 ③ 4 ④ 0 ⑤ -2

해설

$$x + y + 2z = 1 \cdots ①$$

$$2x - y + z = 5 \cdots ②$$

$$① + ②: x + z = 2 \Rightarrow z = 2 - x$$

$$② \times 2 - ①: x - y = 3 \Rightarrow y = x - 3$$

$$\therefore ax^2 + by^2 + cz^2 = 6$$

$$\Rightarrow ax^2 + b(x - 3)^2 + c(2 - x)^2$$

$$= (a + b + c)x^2 - (4c + 6b)x + 9b + 4c = 6$$

모든 실수 x, y, z 에 대해 성립하려면

$$a + b + c = 0, \quad 4c + 6b = 0, \quad 9b + 4c = 6$$

위의 식을 연립하여 풀면, $a = 1, b = 2, c = -3$

$$\therefore 3a + 2b + c = 4$$

20. x 에 대한 항등식 $(1+2x-x^2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$ 에서 $3a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10}$ 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

i) 항등식의 상수항 : $a_0 = 1$
ii) 항등식에 $x = 1, x = -1$ 을 대입하여 식을 만든다.
 $x = 1$ 을 대입하면 $2^5 = a_0 + a_1 + \dots + a_{10} \dots$ ①
 $x = -1$ 을 대입하면 $(-2)^5 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \dots + a_{10} \dots$ ②
① + ② : $0 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10})$
 $\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10} = 0$
 $3a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10} = 2(\because a_0 = 1)$

21. $2x^2 + xy - y^2 + 10x + 4y + 12$ 를 x, y 의 두 일차식의 곱으로 인수분해하면, $(x + ay + b)(2x + cy + d)$ 가 된다고 할 때, $a + b + c + d$ 의 값은? (단, a, b, c, d 는 상수)

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} & 2x^2 + xy - y^2 + 10x + 4y + 12 \quad (\leftarrow x \text{에 관하여 정리}) \\ &= 2x^2 + (y + 10)x - (y^2 - 4y - 12) \\ &= 2x^2 + (y + 10)x - (y + 2)(y - 6) \\ &= (x + (y + 2))(2x - (y - 6)) \\ &= (x + y + 2)(2x - y + 6) \\ &\therefore a = 1, b = 2, c = -1, d = 6 \\ &\therefore a + b + c + d = 8 \end{aligned}$$

22. 세 실수 x, y, z 에 대하여 $[x, y, z] = xy^2 - y^2z$ 라 하자. $x - y = 2$, $xy - yz - zx = 1$ 이라 할 때, $[y, x, z] + [z, y, x]$ 의 값은?

- ① 0 ② -2 ③ 2 ④ -4 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} [y, x, z] &= yx^2 - x^2z, [z, y, x] = zy^2 - y^2x \\ [y, x, z] + [z, y, x] &= yx^2 - x^2z + zy^2 - y^2x \\ &= xy(x - y) - z(x^2 - y^2) \\ &= (x - y)(xy - yz - zx) \\ &= 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

23. $x - y = 1$ 이고 $x^2 + y^2 = -1$ 일 때, $x^{10} + y^{13}$ 의 값은 얼마인가?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$x - y = 1 \text{에서 } y = x - 1$$

이것을 $x^2 + y^2 = -1$ 에 대입하면

$$2x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

양변에 $x + 1$ 을 곱하면, $x^3 + 1 = 0$

$$\therefore x^3 = -1$$

또 $x = y + 1$ 을 $x^2 + y^2 = -1$ 에 대입하면

$$2y^2 + 2y + 2 = 0, y^2 + y + 1 = 0 \therefore y^3 = 1$$

$$\therefore x^{10} + y^{13} = (x^3)^3 \cdot x + (y^3)^4 \cdot y$$

$$= (-1)^3 \cdot x + 1^4 \cdot y$$

$$= -(x - y) = -1$$

24. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+1$ 로 나누면 나머지가 4이다. 이 때, $f(x)$ 를 $(x+1)(x-1)^2$ 으로 나눌 때, 나머지를 $ax^2 + bx + c$ 라 하면 $a + b + c$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}
 & f(x) \text{를 } x+1 \text{로 나눈 나머지가 4이므로} \\
 & f(-1) = 4 \\
 & f(x) = (x-1)^2 Q(x) \cdots \text{㉠} \\
 & f(x) = (x+1)(x-1)^2 Q'(x) + ax^2 + bx + c \\
 & \quad = (x+1)(x-1)^2 Q'(x) + a(x-1)^2 \quad (\because \text{㉠}) \\
 & \text{양변에 } x = -1 \text{를 대입하면} \\
 & f(-1) = 4a = 4 \therefore a = 1 \\
 & ax^2 + bx + c = a(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \\
 & \therefore b = -2, c = 1 \\
 & \therefore a + b + c = 0
 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}
 & ax^2 + bx + c \text{를 구하는 것이 아니라 } a + b + c \text{를 통째로 구할} \\
 & \text{때는 다음과 같이 풀 수 있다.} \\
 & f(x) \text{를 } (x-1)^2 \text{으로 나누어 떨어지므로 } f(1) = 0 \\
 & f(x) = (x+1)(x-1)^2 Q'(x) + ax^2 + bx + c \\
 & \text{양변에 } x = 1 \text{를 대입하면} \\
 & f(1) = 0 + (a + b + c) = 0 \\
 & \therefore a + b + c = 0
 \end{aligned}$$

25. $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ 을 인수분해 할 때, 다음 중 인수가 아닌 것은?

① $a+b$

② $b+c$

③ $a+c$

④ $a^2+ab+bc+ca$

⑤ $a^2+2ab+b^2$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \{(a+b+c)^3 - a^3\} - (b^3 + c^3) \\ &= (a+b+c-a)\{(a+b+c)^2 + (a+b+c)a + a^2\} \\ &\quad - (b+c)(b^2 - bc + c^2) \\ &= (b+c)(3a^2 + 3ab + 3bc + 3ca) \\ &= 3(b+c)(a^2 + ab + bc + ca) \\ &= 3(b+c)\{a(a+b) + c(a+b)\} \\ &= 3(a+b)(b+c)(c+a)\end{aligned}$$