1. 이차방정식 $x^2 - mx + 2m + 1 = 0$의 한 근이 1일 때 다른 한 근은? (단, m은 상수)

① 3　② 2　③ 0　④ -1　⑤ -3

해설

$x^2 - mx + 2m + 1 = 0$에 $x = 1$을 대입하면
$1 - m + 2m + 1 = 0 \quad \therefore m = -2$
$x^2 + 2x - 3 = 0, \quad (x + 3)(x - 1) = 0$
$\therefore x = -3,\ 1$
따라서, 다른 근은 -3

2. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라고 할 때 $|\alpha-\beta|$는 다음 중 어느 것과 같은가 ?

① $\dfrac{\sqrt{D}}{a}$ ② $\dfrac{-\sqrt{D}}{a}$ ③ $\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$
④ $-\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$ ⑤ $-\dfrac{D}{|a|}$

해설

근의 공식을 이용하여 풀면

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

즉 $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ (단, $D=b^2-4ac$)

$$\begin{aligned}\therefore |\alpha-\beta| &= \left|\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right| \\ &= \left|\frac{-b+\sqrt{D}+b+\sqrt{D}}{2a}\right| \\ &= \left|\frac{2\sqrt{D}}{2a}\right| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}\end{aligned}$$

3. 이차함수 $y = 12x - (1+3x)(1-3x)$ 가 $x = p$ 에서 최소이고 최솟값은 q 일 때, $p + q$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{17}{3}$ ② $-\frac{5}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$y = 12x - (1+3x)(1-3x) = 9x^2 + 12x - 1$

$= 9\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 5 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5$

따라서, $x = -\frac{2}{3}$ 일 때 최소이고

최솟값은 -5 이므로

$p = -\frac{2}{3}$, $q = -5$

$\therefore p + q = -\frac{17}{3}$

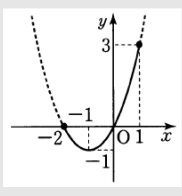
4. $-2 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, $-2 \le x \le 1$ 에서
$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.
즉, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$
따라서, $x = 1$ 일 때 최댓값 3,
$x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로
구하는 합은 $3 - 1 = 2$



5. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -1$ (중근), $-\frac{1}{2}$, 2　　② $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 1

③ $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 2　　④ $x = -1$, $\frac{1}{2}$, 2 (중근)

⑤ $x = -1$, $\frac{1}{2}$ (중근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -1 & -6 & -1 & 2 \\
-1 & & -2 & 3 & 3 & -2 \\
\hline
 & 2 & -3 & -3 & 2 & \boxed{0} \\
2 & & 4 & 2 & -2 & \\
\hline
 & 2 & 1 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

조립제법에 의하면 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(2x^2 + x - 1) = 0$

$(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$

$\therefore\ x = -1,\ \frac{1}{2},\ 2$

6. x에 대한 이차방정식 $2mx^2+(5m+2)x+4m+1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값은?

① $-\frac{3}{2},\ -2$　② $-\frac{7}{12},\ -\frac{1}{2}$　③ $-\frac{7}{2},\ 2$
④ $-\frac{2}{7},\ 2$　⑤ $\frac{2}{7},\ \frac{3}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은 $D=0$이므로

$D=(5m+2)^2-4\cdot 2m\cdot(4m+1)=0$

$25m^2+20m+4-32m^2-8m=0$

$7m^2-12m-4=0$

$(7m+2)(m-2)=0$

$\therefore m=-\frac{2}{7}$ 또는 2

7. x에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2+2kx+k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k의 최솟값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

(i) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $k-1 \neq 0$이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=k^2-(k-1)^2>0,\ 2k-1>0$$

$$\therefore k>\frac{1}{2}$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

8. x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이 허근을 가질 때, $k>m$이다. m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이

허근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)<0$

$(k^2-2k+1)-(k^2-1)<0$

$-2k+2<0,\ k>1$

$\therefore\ m=1$

9. 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$ 이 실수 k 의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$\dfrac{D}{4} = (k-a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$

$\therefore\ -2ka - b + 2 = 0$

이 식은 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k 에 대한 항등식이다.

$a = 0,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 2$

10. 이차식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4 = 0$
이 중근을 갖는다.
따라서, $\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (2k^2 - 6k + 4) = 0$
위의 식을 정리하면
$-k^2 + 4k - 3 = 0$
$k^2 - 4k + 3 = 0$
$(k-1)(k-3) = 0$에서
$k = 1$ 또는 $k = 3$

11. $x^2 - px + q = 0$의 두 근이 α, β이다. $\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = 2$일 때 $p^2 + q^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

두 근의 합이 3이므로 $p = 3$,
두 근의 곱이 2이므로 $q = 2$이다.
따라서 $p^2 + q^2 = 9 + 4 = 13$

12. 이차식 $2x^2-4x+3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$

② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

③ $(x+3)(2x-1)$

④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$a=2, b'=-2, c=3$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4-6}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

13. x에 대한 이차방정식 $x^2-(k-3)x+k+2=0$의 두 근이 모두 양수일 때 실수 k의 값의 범위는?

① $k \ge -5-2\sqrt{6}$ ② $k \ge -5+2\sqrt{6}$ ③ $k \ge -5+\sqrt{6}$

④ $k \ge 5+\sqrt{6}$ ⑤ $k \ge 5+2\sqrt{6}$

해설

$x^2-(k-3)x+k+2=0$에서

$D=(k-3)^2-4(k+2)$

$=k^2-6k+9-4k-8$

$=k^2-10k+1 \ge 0$

$\therefore k \le 5-2\sqrt{6}$ 또는 $k \ge 5+2\sqrt{6}$

두 근의 합 $k-3>0$이므로 $k>3$

두 근의 곱 $k+2>0$이므로 $k>-2$

따라서 $k \ge 5+2\sqrt{6}$

14. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서
$x^2 = t$ 로 놓으면
$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$
$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$
(i) $t = 4$ 일 때, $x^2 = 4$
$\therefore\ x = \pm 2$
(ii) $t = 9$ 일 때, $x^2 = 9$
$\therefore\ x = \pm 3$
따라서 모든 해의 합은
$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

15. 실수 a, b에 대하여 연산$*$를 $a * b = a^2 + b$ 로 정의한다. 방정식 $x * (x-6) = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha + 2\beta$의 값을 구하여라. (단, $\alpha < \beta$)

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x * (x-6) = 0$ 에서

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x+3)(x-2) = 0$

$\therefore\ x = -3,\ 2$

$\therefore\ \alpha = -3,\ \beta = 2\ (\alpha < \beta)$

$\therefore \alpha + 2\beta = 1$

16. 이차방정식 $(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 해는 $x=a$ 또는 $x=p+qi$이다. 이 때, $a+p+q$의 값을 구하여라. (단, a, p, q는 실수)

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)(-3+i)x+2(1+i)=0$

$2x^2-2(2+i)x+2(1+i)=0$

$x^2-(2+i)x+1+i=0$

$(x-1)\{x-(1+i)\}=0$

$x=1$ 또는 $x=1+i$

$\therefore a+p+q=3$

17. 이차방정식 $x^2-4|x|-5=0$의 두 근의 곱은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때,
$x^2-4x-5=(x-5)(x+1)=0$
$\therefore x=5$
ⅱ) $x<0$일 때,
$x^2+4x-5=(x+5)(x-1)=0$
$\therefore x=-5$
ⅰ), ⅱ)에서 두 근의 곱은 -25이다.

18. 이차방정식 $f(x)=0$의 두근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha+\beta=6$이 성립한다. 이 때, 방정식 $f(5x-7)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0,\ \ (a\neq 0)$에서
$f(5x-7)=a(5x-7-\alpha)(5x-7-\beta)=0$
$\therefore\ 5x=7+\alpha,\ 5x=7+\beta$
$x=\dfrac{7+\alpha}{5},\ \dfrac{7+\beta}{5}$
따라서, 구하는 두 근의 합은
$\dfrac{14+\alpha+\beta}{5}=\dfrac{20}{5}=4$

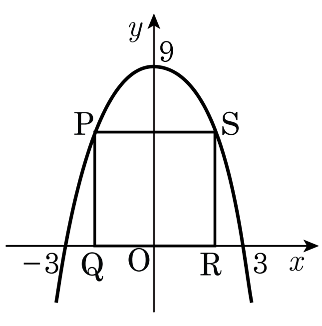
19. 직선 $y=2x+k$ 가 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

이차방정식 $2x+k=x^2$,
즉 $x^2-2x-k=0$ 의 두 근을 α,β 라 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-k$
두 그래프의 교점의 좌표를
$(\alpha,\ 2\alpha+k),\ (\beta,\ 2\beta+k)$ 라 하면
두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 이므로
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha^2-\beta)^2}=2\sqrt{10}$ 에서
$\sqrt{5(\alpha-\beta)^2}=2\sqrt{10}$
$\therefore |\alpha-\beta|=2\sqrt{2}$
이때, $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ 에서
$(2\sqrt{2})^2=2^2-4(-k),\ 8=4+4k$
$\therefore\ k=1$

20. 다음의 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 에 내접하는 직사각형 PQRS 가 있다. PQRS 의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

먼저 이차함수의 식을 구하면
$(0, 9)$ 를 지나므로 $y = mx^2 + 9$,
$(3, 0)$ 을 지나므로 $y = -x^2 + 9$
$\mathrm{R}(a, 0)$ 이라 하면 (단, $0 < a < 3$), $\mathrm{S}(a, -a^2 + 9)$
직사각형의 가로는 $2a$, 세로는 $-a^2 + 9$
둘레는 $2\{2a + (-a^2 + 9)\} = -2(a - 1)^2 + 20$
따라서 둘레의 최댓값은 20

21. x, y 에 대한 이차식 $2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$ 가 x, y 에 대한 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 상수 k 의 값은 ?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ -4　　⑤ -5

해설

$2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$를 x 에 대해 정리하면
$2x^2 + (y-1)x - y^2 + 2y + k$
이 식이 일차식의 곱으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.
$D = (y-1)^2 - 4x2(-y^2 + 2y + k)$
$\quad = 9y^2 - 18y - 8k + 1$
이 식이 완전제곱식이므로
$\frac{D'}{4} = 9^2 + 9(-8k + 1)$
$\therefore k = -1$

해설

일차식의 곱으로 이루어져있으므로, 이차항을 이용하여
$(2x - y + a)(x + y + b)$ 로 나타낼 수 있다.
전개하면, $2x^2 + xy - y^2 + (a + 2b)x + (a - b)y + ab$ 이고
문제에 주어진 식과 같아야 되므로,

$$\begin{array}{rl} & a+2b=-1 \\ -) & a-\ \ b=2 \\ \hline & 3b=-3 \end{array}$$

$\therefore a = 1, \quad b = -1$
$\therefore k = ab = -1$

22. 이차방정식 $2x^2 - 4x - 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$의 값은?

① 1　　② 3　　③ 4　　④ 8　　⑤ 11

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = -\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= 8 - 3 \times (-\frac{1}{2}) \times 2 = 11\end{aligned}$$

23. 이차함수 $y = x^2 - x + 3$이 직선 $y = kx - 6$보다 항상 위쪽에 있도록 상수 k의 값의 범위를 정하면 $\alpha < k < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = x^2 - x + 3 - (kx - 6) = x^2 - (1 + k)x + 9$ 에서 $D < 0$을 이용하여 $\alpha + \beta$를 구하면,

$(1 + k)^2 - 36 < 0$

$k^2 + 2k - 35 < 0$, $(k + 7)(k - 5) < 0 \therefore\ -7 < k < 5$

$\therefore\ \alpha + \beta = -7 + 5 = -2$

24. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-2)x+a^2+a+2=0$의 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-1)(\beta-1)$의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, a는 상수)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

이차방정식 $x^2+(a-2)x+a^2+a+2=0$이
두 실근을 가져야 하므로
$D=(a-2)^2-4(a^2+a+2)=-3a^2-8a-4\geq 0$
$(3a+2)(a+2)\leq 0$
$\therefore -2\leq a\leq -\frac{2}{3} \cdots$ ㉠
근과 계수의 관계에서
$\alpha+\beta=-a+2,\ \alpha\beta=a^2+a+2$이므로
$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$
$=a^2+a+2+a-2+1$
$=a^2+2a+1=(a+1)^2$
따라서, $-2\leq a\leq -\frac{2}{3}$에서
$a=-1$일 때 최솟값 0,
$a=-2$일 때 최댓값 1을 가지므로
최댓값과 최솟값의 합은 1이다.

25. 사차방정식 $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1 = 0$의 한 근을 α라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

먼저 주어진 방정식을 x^2으로 나누면

방정식은 $x^2 - 6x + 11 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$\rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0$이 된다.

이 식에 α를 넣어도 성립하므로

$\alpha + \frac{1}{\alpha}$를 t로 치환하면

$\alpha + \frac{1}{\alpha}$는 3이 된다.

따라서 $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$