1. $1 < a < 4$일 때, $\sqrt{(a-4)^2} + |a-1|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\sqrt{(a-4)^2} + |a-1|$
$= |a-4| + |a-1|$
$= -a + 4 + a - 1 \;\; = 3$

2. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 일 때, 다음 식의 값은?

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

① $3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$　② $3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$　③ 9

④ $5(\sqrt{3} + \sqrt{2})$　⑤ $7(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

해설

$$(\text{주어진 식}) = \frac{\frac{x^3 + y^3}{(xy)^3}}{\frac{x+y}{xy}}$$

$$= \frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{(x+y)(xy)^2}$$

$$= \frac{(x+y)^2 - 3xy}{(xy)^2}$$

조건에서 $x + y = 2\sqrt{3},\ xy = 1$

$$\therefore\ (\text{주어진 식}) = \frac{(2\sqrt{3})^2 - 3 \cdot 1^2}{1} = 9$$

3. 다음 등식을 만족하는 유리수 x, y의 값을 구하면?

$$x(\sqrt{2}-3)+y(\sqrt{2}+2)=3\sqrt{2}-4$$

① $x=2,\ y=-1$ ② $x=-1,\ y=-2$
③ $x=2,\ y=1$ ④ $x=-1,\ y=2$
⑤ $x=1,\ y=2$

해설

$(-3x+2y)+(x+y)\sqrt{2}=-4+3\sqrt{2}$

$$\begin{cases} -3x+2y=-4 \\ x+y=3 \end{cases}$$

$\therefore\ x=2,\quad y=1$

4. 조화수열 12, 6, 4, 3, $\cdots$ 의 일반항은?

① $\frac{12}{n}$ ② $\frac{8}{n}$ ③ $\frac{6}{n}$ ④ $\frac{3}{n}$ ⑤ $\frac{2}{n}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$이라고 하면,

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이다.

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \cdots$

$= \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \cdots$

따라서 등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항은 $\frac{n}{12}$

$\therefore\ a_n = \frac{12}{n}$

5. 각 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 : a_3 = 4 : 9$이고, $a_2 = 4$일 때, a_5의 값은?

① $\frac{11}{2}$ ② 7 ③ $\frac{19}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{27}{2}$

해설

공비를 r이라고 하면
$a_1 : a_3 = a_1 : a_1 r^2 = 1 : r^2$이므로
$1 : r^2 = 4 : 9$에서
$r^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore\ r = \frac{3}{2}$
$a_2 = a_1 r = 4$에서 $\frac{3}{2}a_1 = 4 \quad \therefore\ a_1 = \frac{8}{3}$
$\therefore\ a_5 = a_1 r^4 = \frac{8}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{27}{2}$

6. 3 과 75 의 등비중항을 x, 3 과 75 의 등차중항을 y 라 할 때, $x+y$ 의 값은?

① 45 ② 48 ③ 49 ④ 50 ⑤ 54

해설

x는 3 과 75 의 등비중항이므로
$x^2 = 3 \times 75 = 15^2$
$\therefore\ x = 15$
y는 3 과 75 의 등차중항이므로
$2y = 3 + 75 = 78$
$\therefore\ y = 39$
$\therefore\ x + y = 15 + 39 = 54$

7. 두 수 1과 64사이에 다섯 개의 수 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5를 넣어서 만든 수열이 등비수열을 이룰 때, a_3의 값은?(단, $a_3 > 0$)

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

주어진 수열이 등비수열을 이루므로
1, a_3, 64도 등비수열을 이룬다.
$(a_3)^2 = 1 \cdot 64 \quad \therefore \; a_3 = 8$

8. $5^{\log_5 2+3\log_5 3-\log_5 6}$ 의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$5^{\log_5 2+3\log_5 3-\log_5 6}$

$= 5^{\log_5 2+\log_5 3^3-\log_5 6}$

$= 5^{\log_5 \frac{2\times 3^3}{6}} = 5^{\log_5 3^2} = 9$

9. $\log_8 3 = p$, $\log_3 5 = q$일 때, $\log_{10} 5$를 p, q로 나타내면?

① pq　　② $\frac{p-q}{3}$　　③ $\frac{2pq}{p+q}$

④ $\frac{3pq}{1+3pq}$　　⑤ $\sqrt{p^2+q^2}$

해설

$\log_8 3 = \log_{2^3} 3 = \frac{1}{3}\log_2 3 = p$

$\therefore \log_2 3 = 3p$

$\log_{10} 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 10} = \frac{\log_3 5}{\log_3 5 + \log_3 2} = \frac{q}{q+\frac{1}{3p}}$

$= \frac{3pq}{3pq+1}$

10. 1이 아닌 양수 p와 세 양수 x, y, z에 대하여 $\log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z = -3$가 성립할 때, xyz의 값은?

① $\dfrac{1}{p^3}$ ② $\dfrac{1}{2p}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $2p$ ⑤ p^2

해설

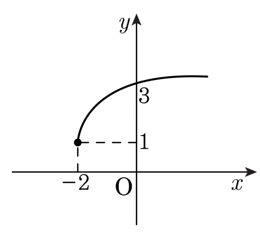
$\log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z$

$= \log_p x + \dfrac{2}{2}\log_p y + \dfrac{3}{3}\log_p z$

$= \log_p xyz = -3$

$\therefore xyz = p^{-3} = \dfrac{1}{p^3}$

11. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

주어진 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축으로 -2 만큼, y 축으로 1만큼 평행이동한 것과 같으므로 $y = \sqrt{a(x+2)}+1$
또, 점 $(0,\ 3)$ 을 지나므로
$3 = \sqrt{2a}+1,\ \ \sqrt{2a} = 2$
$\therefore\ a = 2$
따라서 $y = \sqrt{2(x+2)}+1 = \sqrt{2x+4}+1$ 이고,
이것이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 와 일치하므로
$a = 2,\ b = 4,\ c = 1$
$\therefore\ a+b+c = 7$

12. $1 \leq x \leq a$일 때, $y = \sqrt{2x-1}+3$의 최솟값이 m, 최댓값이 6이다. $a+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$1 \leq x \leq a$에서, 함수 $y = \sqrt{2x-1}+3$은 증가함수이므로
$x = 1$ 일때 최솟값을 가진다.
곧, $m = \sqrt{2-1}+3 = 4$
$\therefore m = 4$
또한, $x = a$일 때 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{2a-1}+3$
$\therefore a = 5$
$\therefore a+m = 9$

13. 무리함수 $y = \sqrt{2x+3}$ 의 그래프가 직선 $y = x + k$ 와 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $\frac{3}{2} < k < 2$　② $\frac{3}{2} \le k < 2$　③ $\frac{3}{2} \le k \le 2$
④ $\frac{3}{2} < k \le 2$　⑤ $1 \le k < 2$

해설

(i) 두 그래프가 접할 때, $\sqrt{2x+3} = x + k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2 + 2(k-1)x + k^2 - 3 = 0$

이것이 중근을 가지므로

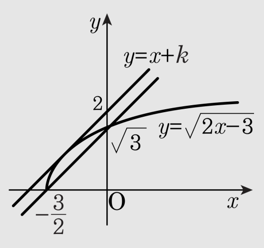
$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k^2 - 3) = -2k + 4 = 0$

$\therefore\ k = 2$

(ii) 직선 $y = x + k$가 점 $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지날때

$0 = -\frac{3}{2} + k$

$\therefore\ k = \frac{3}{2}$



(i), (ii)와 위의 그림으로부터 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 k 값의 범위는

$\frac{3}{2} \le k < 2$

14. 어떤 등차수열의 첫째항부터 10까지의 합이 100이고, 11항부터 20항까지의 합이 300일 때 21항부터 30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 500

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10} = \dfrac{10(2a+9d)}{2} = 100$

$2a + 9d = 20$

$S_{20} - S_{10} = \dfrac{20(2a+19d)}{2} - 100 = 300$

$10(2a+19d) = 400$

$2a + 19d = 40$

$2a + 9d + 10d = 40$

$20 + 10d = 40$

$d = 2$

$\therefore 2a = 2,\ a = 1$

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{20} &= \frac{30(2a+29d)}{2} - (100+300) \\ &= \frac{30(2+29\times 2)}{2} - 400 \\ &= 15 \times 60 - 400 \\ &= 500 \end{aligned}$$

15. $1 \cdot 20 + 2 \cdot 19 + 3 \cdot 18 + \cdots + 20 \cdot 1$ 의 값은?

① 442 ② 882 ③ 1540 ④ 3080 ⑤ 3528

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sum_{k=1}^{20} k(21-k) \\ &= 21\sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} k^2 \\ &= 21 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} - \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} = 1540\end{aligned}$$

16. 수열 $\sqrt{3-2\sqrt{2}},\ \sqrt{5-2\sqrt{6}},\ \sqrt{7-2\sqrt{12}},\cdots$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 10일 때, n의 값은?

① 116 ② 117 ③ 118 ④ 119 ⑤ 120

해설

$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1,\ \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$
$\sqrt{7-2\sqrt{12}} = \sqrt{4}-\sqrt{3},\cdots$ 이므로
제 n항은 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$이다.
따라서, 제 n항까지의 합은
$(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
$= -1+\sqrt{n+1}$
$= 10$
$\therefore\ \sqrt{n+1} = 11$에서 $n = 120$

17. 수열 $1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26, \cdots$ 의 제 20항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 362

해설

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 5, & 10, & 17, & 26 \\ & \bigvee & \bigvee & \bigvee & \bigvee & \bigvee \\ & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - (n-1) \\ &= 1 + n^2 - n - n + 1 \end{aligned}$$

$a_n = n^2 - 2n + 2$

$\therefore a_{20} = 400 - 40 + 2 = 362$

18. 수열 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \cdots$ 에서 제 20항은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ 1 ⑤ $\frac{1}{7}$

해설

제1군 제2군 제3군 제5군

$$(1),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{2}\right),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3}\right),\ \left(\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\cdots\right),\cdots$$

에서 제 1군부터 제 5군까지의 항수는

$1+2+3+4+5=15$

따라서, 제 20항은 제 6군의 5번째 항이므로

$\frac{5}{6}$ 이다.

19. $a_1=3,\ a_2=2,\ a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{66} a_n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 120

해설

$a_1=3,\ a_2=2,\ a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$a_3=\dfrac{2+1}{3}=1$

$a_4=\dfrac{1+1}{2}=1$

$a_5=\dfrac{1+1}{1}=2$

$a_6=\dfrac{2+1}{1}=3$

$a_7=\dfrac{3+1}{2}=2$

$\vdots$

$\therefore\ a_1=a_6=a_{11}=\cdots=3$

$a_2=a_7=a_{12}=\cdots=2$

$a_3=a_8=a_{13}=\cdots=1$

$a_4=a_9=a_{14}=\cdots=1$

$a_5=a_{10}=a_{15}=\cdots=2$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{66} a_n=13(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)+a_1$

$=13\times9+3=120$

20. $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이 자연수가 되는 정수 n의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 0

해설

$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{n}} = 3^{\frac{-3}{n}}$ 이 자연수

$n = -1$일때, 3^3

$n = -3$일때, 3

$\Rightarrow 2$개

21. $\log_{10}(1+1)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{10}\left(1+\frac{1}{99}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

(준식) $=\log_{10}2+\log_{10}\frac{3}{2}+\log_{10}\frac{4}{3}+\cdots+\log_{10}\frac{100}{99}$

$=\log_{10}\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{100}{99}\right)$

$=\log_{10}100=\log_{10}10^2=2\log_{10}10=2$

22. 다음 포그슨의 공식에 의하면 2등성인 별의 밝기는 4등성의 밝기의 약 몇 배인가? (단, 별의 각 등급 간의 밝기의 비는 일정하고, $100^{\frac{2}{5}} \fallingdotseq 2.5^2$ 이다.)

> 기원전 그리스의 히파르코스(Hipparchos, 190? ~ 125?B.C)는 눈에 보이는 별들을 밝기에 따라 가장 밝은 별(1등성)에서 가장 어두운 별 6등성)까지 6등급으로 분류하였다. 그 후 1등성의 밝기는 6등성의 밝기의 약100배임을 알게 되었다. 1856년에도 유도된 포그슨의 공식(Pogson' formula)에 의하면 별의 등급 (m)과 별의 밝기 (L)사이의 관계는 다음과 같다.
> $m = -\frac{5}{2}\log L + C$($C$는 상수)

① 2.5　② 5　③ 6.25　④ 7.5　⑤ 8

해설

2등성 별의 밝기를 L_2, 4등성 별의 밝기를 L_4라고 하면

$2 = -\frac{5}{2}\log L_2 + C \cdots\cdots$ ㉠

$4 = -\frac{5}{2}\log L_4 + C \cdots\cdots$ ㉡

㉠ - ㉡에서 $\frac{4}{5} = \log \frac{L_2}{L_4}$

$\therefore \frac{L_2}{L_4} = 10^{\frac{4}{5}} = 100^{\frac{2}{5}} \fallingdotseq 2.5^2 = 6.25$

23. 어느 도시의 최근 인구 증가율은 연평균 4% 라고 한다. 이 도시의 인구가 이러한 추세로 증가한다면 10 년 후의 이 도시의 인구는 현재의 k 배이다. 이때, $100k$ 의 값을 구하여라. (단, $\log 1.04 = 0.017, \log 1.48 = 0.17$ 로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 148

해설

일정한 비율로 증가하거나 감소한 후의 양을 지수의 식으로 나타낸다.
현재 이 도시의 인구의 수를 A 라 하면 10 년 후의 이 도시의 인구의 수는 kA 이다.
$A(1+0.04)^{10} = kA, 1.04^{10} = k$
이 식의 양변에 상용로그를 취하면
$\log 1.04^{10} = \log k$
이 때, $10 \log 1.04 = 10 \times 0.017$ 이므로
$\log k = 0.17 \quad \therefore \ k = 1.48$
$\therefore 100k = 148$

24. 수직선 위의 세 점 A(2), B(4), C(a)에 대하여 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점을 P, 선분 BC를 5 : 3으로 외분하는 점을 Q라 하자. 세 점 A, P, Q의 좌표가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, a의 값은?

① 6　　② $\frac{31}{5}$　　③ $\frac{32}{5}$　　④ $\frac{34}{5}$　　⑤ 7

해설

점 P의 좌표를 x라 하면

$x = \frac{8-2}{2-1} = 6$

점 Q의 좌표를 y라 하면

$y = \frac{5a-12}{5-3} = \frac{5a-12}{2}$

이때, 세 수 2, 6, $\frac{5a-2}{2}$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2 + \frac{5a-12}{2} = 6 \times 2$

$5a = 32$

$\therefore\ a = \frac{32}{5}$

25. 첫째항이 50 이고, 공차가 -4 인 등차수열은 첫째항부터 몇 째항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

▶ 답 :

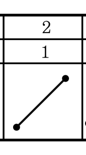
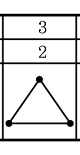
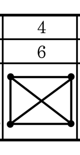
▷ 정답 : 13 번째 항

해설

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n\{2\cdot 50+(n-1)\cdot(-4)\}}{2} \\ &= \frac{n(100-4n+4)}{2} \\ &= \frac{n(-4n+104)}{2} \\ &= n(-2n+52) \\ &= -2n^2+52n \\ &= -2(n^2-26n+13^2-13^2) \\ &= -2(n-13)^2+2\times 13^2 \end{aligned}$$

$\therefore n=13$ 일 때 최대

26. 컴퓨터가 n대 있는 게임방에서 컴퓨터 사이를 케이블선으로 다음 그림과 같은 방법으로 연결하려고 한다.

컴퓨터의 대수	2	3	4	$\cdots$
전화선의 수	1	2	6	$\cdots$
연결 방법				$\cdots$

이때, 11대의 컴퓨터를 연결하는 데 필요한 케이블선의 개수는?

① 37 ② 45 ③ 55 ④ 66 ⑤ 78

해설

컴퓨터가 n대일 때, 필요한 케이블선의 개수를 a_n이라고 하면

$a_2 = 1$

$a_3 = a_2 + 2$

$a_4 = a_3 + 3$

$\vdots$

$a_{10} = a_9 + 9$

$a_{11} = a_{10} + 10$

위의 식들을 변끼리 더하면

$a_2+a_3+\cdots+a_{10}+a_{11} = a_2+a_3+\cdots+a_{10}+1+2+3+\cdots+9+10$

$\therefore\ a_{11} = 1+2+3+\cdots+9+10 = 55$

27. 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 스티커와 가로, 세로의 길이가 각각 2, 1인 직사각형 모양의 스티커가 있다. 이 두 종류의 스티커를 사용하여 왼쪽부터 차례로 붙이되, 가로의 길이가 1인 스티커 다음에는 반드시 가로의 길이가 2인 스티커가 와야 한다고 할 때, 가로의 길이가 n, 세로의 길이가 1인 직사각형을 두 종류의 스티커를 이용하여 겹치지 않게 완전히 메우는 방법의 수를 a_n이라 하자. 이 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$　　② $a_{n+3} = a_{n+3} + a_n$

③ $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1}$　　④ $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$

⑤ $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$

해설

세로의 길이는 모두 1이므로 가로의 길이만 생각하기로 한다. 가로의 길이가 $(n+3)$인 직사각형을 스티커로 메우는 경우의 수는 a_{n+3}이고, 다음 두 가지의 경우로 나누어 생각할 수 있다.
(i) 처음에 붙인 스티커가 가로의 길이가 1인 경우 두 번째 스티커는 반드시 가로의 길이가 2이어야 하고, 나머지 n만큼만 주어진 규칙대로 붙이면 되므로 이 경우의 수는 a_n이다.
(ii) 처음에 붙인 스티커가 가로의 길이가 2인 경우 나머지 $(n+1)$만큼은 주어진 규칙대로 붙이면 되므로 이 경우의 수는 a_{n+1}이다.
(i), (ii)에서 $a_{n+3} = a_n + a_{n+1}$

28. $\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{b}$ 일 때, $a+b$의 값을 구하여라.(단, a, b는 서로소인 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$

$= \sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

따라서, $a=2$, $b=1$ $\therefore$ $a+b=3$

29. 모든 실수 x 에 대하여
$\sqrt[3]{(a-3)x^2-4(a-3)x-10}$ 이 음수가 되도록 하는 정수 a 의 합을 구하면?

① 1　② 3　③ 5　④ 6　⑤ 8

해설

모든 실수 x 에 대하여
$\sqrt[3]{(a-3)x^2-4(a-3)x-10}$ 이 음수가 되려면
$(a-3)x^2-4(a-3)x-10<0 \ldots$ ㉠
(i)$a=3$ 일 때,
$-10<0$ 이므로 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립한다.
(ii)$a \neq 3$ 일 때,
모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하려면 $a-3<0$ 이고
$(a-3)x^2-4(a-3)x-10=0$ 의 판별식 D에 대하여
$\frac{D}{4}=4(a-3)^2+10(a-3)<0$
$(a-3)(4a-12+10)<0$
$(a-3)(2a-1)<0$
$\therefore \frac{1}{2}<a<3$
(i), (ii) 에 의하여 $\frac{1}{2}<a \leq 3$ 이므로
만족하는 정수 a 의 값의 합은 $1+2+3=6$

30. A^{100} 이 110자리의 자연수일 때, $\frac{1}{A^8}$ 은 소수점 아래 n 번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타난다. 이때, n 의 값은?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

A^{100} 이 110자리의 자연수이므로 A^{100} 의 지표는 109이다.

$109 \le \log A^{100} < 100$

$\frac{109}{100} \le \log A < \frac{110}{100}$

$\therefore 1.09 \le \log A < 1.10 \cdots$ ㉠

$\log \frac{1}{A^8} = -8\log A$ 이므로 ㉠에서

$-8.8 < -8\log A \le -8.72$

$\therefore \bar{9}.2 < \log \frac{1}{A^8} \le \bar{9}.28$

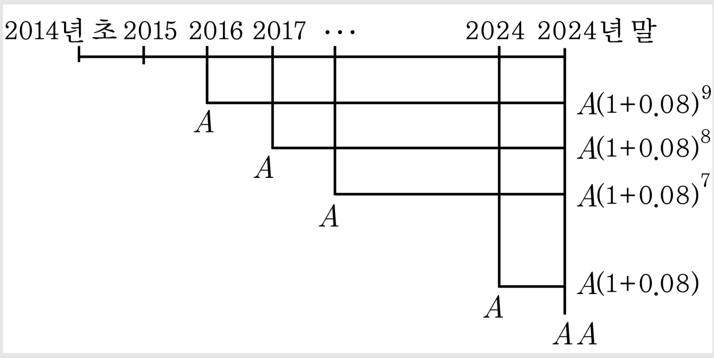
따라서 $\log \frac{1}{A^8}$ 의 지표가 -9 이므로 $\frac{1}{A^8}$ 은 소수점 아래 9번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타난다.

31. 진영이와 선경이는 연이율이 8% 인 복리로 2014 년 초에 은행에서 각각 1000 만원을 대출받았다. 진영이는 2015 년 초에 A 만원씩 갚아서 2024 년초까지 10 년에 걸쳐 모두 상환하려고 하고, 선경이는 2015 년 말부터 매년 말에 B 원씩 갚아서 2024 년 말까지 10 년에 걸쳐 모두 상환하려고 한다. 이때, $\frac{A}{B}$ 의 값은?

① $\frac{23}{25}$ ② $\frac{25}{27}$ ③ 1 ④ $\frac{25}{23}$ ⑤ $\frac{27}{25}$

해설

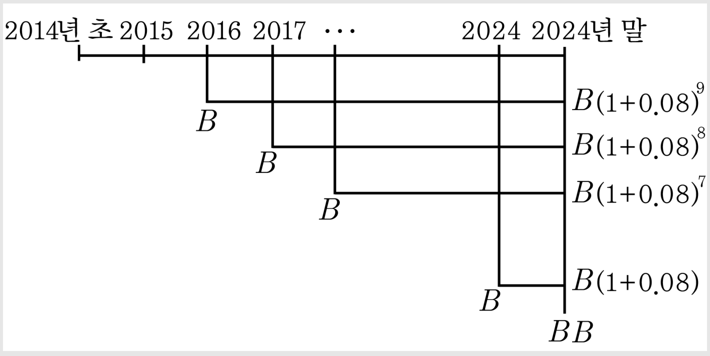
진영이가 마지막으로 모두 상환하는 해는 2024 년 초이므로 진영이가 빌린 돈은 2024 년 초에 원리합계가 $1000 \cdot 1.08^{10}$(만원) 이다.



$A \cdot 1.08^9 + A \cdot 1.08^8 + A \cdot 1.08^7 + \cdots + A \cdot 1.08 + A = 1000 \cdot 1.08^{10}$(만원)

$\therefore \frac{A(1.08^{10}-1)}{1.08-1} = 1000 \cdot 1.08^{10}$(만원)

한편, 선경이가 마지막으로 모두 상환하는 해는 2024 년 말이므로 선경이가 빌린 돈은 2024 년 말에 원리합계가 $1000 \cdot 1.08^{10}$(만원) 이다.



$B \cdot 1.08^9 + B \cdot 1.08^8 + B \cdot 1.08^7 + \cdots + B \cdot 1.08 + B = 1000 \cdot 1.08^{11}$(만원) $\therefore \frac{B(1.08^{10}-1)}{1.08-1} = 1000 \cdot 1.08^{11}$(만원)

$\therefore \frac{A}{B} = \frac{1}{1.08} = \frac{100}{108} = \frac{25}{27}$

32. $A = \left\{ x \,\middle|\, x = \left\{ \dfrac{2^{11}(3^4+3^2+1)}{3^6-1} \right\}^{\frac{1}{2n}},\ n\text{과 } x\text{는 양의 정수} \right\}$ 의 모든 원소들의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 22

해설

$$x = \left\{ \frac{2^{11}(3^4+3^2+1)}{(3^2-1)(3^4+3^2+1)} \right\}^{\frac{1}{2n}}$$

$$= \left(\frac{2^{11}}{3^2-1} \right)^{\frac{1}{2n}} = 2^{\frac{4}{n}}$$

양의 정수 n에 대하여 x가 자연수가 되기 위한 n은 1, 2, 4이다.

따라서, $A = \{2, 4, 16\}$

그러므로 집합 A의 원소의 합은 22이다.

33. 1이 아닌 세 자연수 a, b, c에 대하여 $a^2 = b^3 = c^5 = k$를 만족하는 k의 값들 중 최소인 수를 p라 할 때, $\log_{16} p = \frac{b}{a}$ (단, a, b는 서로소)이다. 이때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 17

해설

2, 3, 5의 최소공배수가 30이므로
$k = 2^{30}$, 3^{30}, 4^{30}, $\cdots$
따라서, k의 최소값은 2^{30}이므로 $p = 2^{30}$이다.
$\log_{16} 2^{30} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$
$\therefore\ a+b = 17$