

1. $f : (x, y) \rightarrow (x - 2, y + 1)$, $g : (x, y) \rightarrow (-x, -y)$ 일 때, 곡선 $y = \sqrt{-x + 2} + 1$ 이 $g \circ f$ 에 의하여 변환된 곡선의 방정식은?

① $y = \sqrt{x - 2} - 1$

② $y = \sqrt{-x - 4} + 2$

③ $y = -\sqrt{x} - 2$

④ $y = -\sqrt{x} + 2$

⑤ $y = -\sqrt{x - 2}$

해설

$y = \sqrt{-x + 2} + 1$ 은 f 에 의하여
 $y - 1 = \sqrt{-(x + 2)} + 2 + 1$
 $\therefore y = \sqrt{-x} + 2$
다시 g 에 의하여 $-y = \sqrt{-(-x)} + 2$
 $\therefore y = -\sqrt{x} - 2$

2. 수열 $-3, a, b, c, 13$ 이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 10

② 15

③ 20

④ 25

⑤ 30

해설

$$a - (-3) = d$$

$$b - a = d$$

$$c - b = d$$

$$13 - c = d$$

좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리

$$\text{더하면 } 13 - (-3) = 4d \therefore d = 4$$

$$\therefore a = -3 + 4 = 1$$

$$b = 1 + 4 = 5$$

$$c = 5 + 4 = 9$$

$$\therefore a + b + c = 15$$

3. 첫째항이 -25 , 공차가 3 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9 항

② 제 10 항

③ 제 11 항

④ 제 12 항

⑤ 제 13 항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$$

이때, $a_n > 0$ 을 만족시키는 n 은

$$3n - 28 > 0, 3n > 28$$

$$\therefore n > \frac{28}{3} = 9.33 \dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

4. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n - 1$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$a_{10} = S_{10} - S_9$$

$$S_{10} = 10^2 + 20 - 1 = 119,$$

$$S_9 = 9^2 + 18 - 1 = 98$$

$$\therefore a_{10} = 119 - 98 = 21$$

5. $\sum_{k=3}^{10} k(k+2)$ 의 값은?

① 460

② 468

③ 478

④ 480

⑤ 484

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} k(k+2) &= \sum_{k=1}^{10} k(k+2) - \sum_{k=1}^2 k(k+2) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (k^2 + 2k) - \sum_{k=1}^2 (k^2 + 2k) \\ &= \sum_{k=1}^{10} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} k - (3 + 8) \\ &= \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - 11 \\ &= 385 + 110 - 11 \\ &= 484\end{aligned}$$

6. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 4$

㉡ $(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = 25^{\sqrt{2}}$

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$

① ㉢

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 2^2 = 4$ (참)

㉡ $(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = (5 \times 5)^{\sqrt{2}} = 25^{\sqrt{2}}$ (참)

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = (3^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\frac{2}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$ (참)

7. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7}{a^{-3} + a^{-4} + a^{-5} + a^{-6} + a^{-7} + a^{-8} + a^{-9}}$$

- ① a^8 ② a^9 ③ a^{10} ④ a^{11} ⑤ a^{12}

해설

분자, 분모에 a^{10} 을 곱하면

$$\frac{a^{10} \times (a + a^2 + \cdots + a^7)}{a^7 + a^6 + \cdots + a^2 + a} = a^{10}$$

8. $3^x = 2 + \sqrt{2}$, $3^y = 2 - \sqrt{2}$ 일 때, $x + y$ 의 값은?

① 1

② $\log_4 3$

③ $\log_3 2$

④ $\log_3 4$

⑤ $\log_4 10$

해설

$x = \log_3(2 + \sqrt{2})$, $y = \log_3(2 - \sqrt{2})$ 이므로

$x + y = \log_3 \{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})\} = \log_3 2$

9. $3^{\log_3 \frac{4}{7} + \log_3 7}$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$$3^{\log_3 \frac{4}{7} + \log_3 7} = 3^{\log_3 4} = 4$$

10. $\log_3 10$ 의 소수부분을 α 라 할 때, 3^α 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{100}{9}$ ⑤ $\frac{100}{3}$

해설

$\log_3 10 = 2 + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$) 이므로 $\alpha = \log_3 10 - 2 = \log_3 \frac{10}{9}$ 이 된다.

따라서 $3^\alpha = 3^{\log_3 \frac{10}{9}} = \frac{10}{9}$ 이다.

11. x, y 는 실수이고 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = -\sqrt{\frac{x}{y}}$ 일 때, $\sqrt{(y-x)^2} + (\sqrt{x-y})^2 - 2\sqrt{y^2}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x$

해설

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = -\sqrt{\frac{x}{y}} \text{ 이 성립하므로 } y < 0, x \geq 0$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(y-x)^2} + (\sqrt{x-y})^2 - 2\sqrt{y^2} \\ &= |y-x| + x-y - 2|y| \\ &= -y+x+x-y+2y=2x \end{aligned}$$

12. $0 \leq a < 2$ 이고 $x = \frac{4a}{a^2 + 4}$ 일 때
 $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$1+x = 1 + \frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2+4a+4}{a^2+4} = \frac{(a+2)^2}{a^2+4}$$

$$1-x = 1 - \frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2-4a+4}{a^2+4} = \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$$

$a^2+4 > 0$ 이고 $0 < a < 2$ 이므로

$a+2 > 0$, $a-2 < 0$

$$\therefore \sqrt{1+x} = \sqrt{\frac{(a+2)^2}{a^2+4}} = \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{(a-2)^2}{a^2+4}} = \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} &= \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}} + \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{a^2+4}} \end{aligned}$$

$\therefore a=0$ 일 때 최댓값 2

13. 두 실수 a, b 에 대하여 $a + b = \sqrt{7\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, $a - b = \sqrt{7\sqrt{3} - \sqrt{5}}$ 가 성립할 때, $a^2 + ab + b^2$ 의 값을 구하면?

- ① $4\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{5} + \sqrt{3}$
④ $5\sqrt{5} + \sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= \frac{1}{2} \{ (a+b)^2 + (a-b)^2 \} \\ &= \frac{1}{2} (7\sqrt{5} - \sqrt{3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{5}) \\ &= 3\sqrt{5} + 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &= \frac{1}{4} \{ (a+b)^2 - (a-b)^2 \} \\ &= \frac{1}{4} (7\sqrt{5} - \sqrt{3} - 7\sqrt{3} + \sqrt{5}) \\ &= 2\sqrt{5} - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore a^2 + ab + b^2 = 5\sqrt{5} + \sqrt{3}$$

14. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$ 의 최댓값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$ 에서
 $x \geq 0, 8-x \geq 0$ 이므로
정의역은 $\{x \mid 0 \leq x \leq 8\}$, $f(x) \geq 0$ 이므로
 $\{f(x)\}^2$ 이 최대일 때 $f(x)$ 도 최대이고
 $\{f(x)\}^2 = x + 2\sqrt{8x-x^2} + 8-x = 8 + 2\sqrt{8x-x^2}$
이때, $y = 8x-x^2 = -(x-4)^2 + 16$ 이므로
 $0 \leq x \leq 8$ 에서 $x=4$ 일 때 최댓값 16을 가진다.
따라서 $x=4$ 일 때 $\{f(x)\}^2$ 은
최댓값 16을 가지므로
 $f(x)$ 의 최댓값은 4이다.

15. $x \geq -1$ 인 실수 x 에 대하여 $f(x) = \sqrt{x+1}$ 로 정의된 함수 f 의 역함수를 f^{-1} 이라고 할 때 모든 양수 t 에 대하여 $\frac{f^{-1}(t)}{(t+1)^2}$ 를 옳게 나타낸 것은?

① $\frac{1}{t+1}$
④ $\frac{t-1}{t+1}$

② $\frac{t}{t+1}$
⑤ $\frac{2t}{t-1}$

③ $\frac{2t-2}{t+1}$

해설

$f(x) = \sqrt{x+1}$ ($x \geq -1$)에서
역함수 $f^{-1}(x)$ 를 구하여 $f^{-1}(t)$ 로 나타내면
 $y = \sqrt{x+1} \rightarrow y^2 = x+1 \rightarrow x = y^2 - 1$
 $\therefore f^{-1}(x) = x^2 - 1$ ($x \geq 0$)
 $\therefore f^{-1}(t) = t^2 - 1$
 $\therefore \frac{f^{-1}(t)}{(t+1)^2} = \frac{t^2 - 1}{(t+1)^2} = \frac{t-1}{t+1}$

16. 2와 162사이에 세 양수 a, b, c 를 넣어 $2, a, b, c, 162$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루게 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 78

해설

$$\begin{aligned}b^2 &= 2 \times 162 \\b &= 18 \quad (\because b > 0) \\2, a, 18, c, 162 &\text{가 등비수열을 이루므로} \\a^2 &= 2 \times 18 \\a &= 6 \quad (\because a > 0) \\c^2 &= 18 \times 162 \\c &= 54 \\\therefore a + b + c &= 6 + 18 + 54 = 78\end{aligned}$$

17. 매출액이 매년 일정한 비율로 증가하는 기업이 있다. 지난 10년간 매출액의 증가율이 69%일 때, 처음 5년간 매출액의 증가율은?

- ① 13% ② 15% ③ 20% ④ 24% ⑤ 30%

해설

매년 매출액의 증가비율을 a 라 하자

$(1 + a)^{10} = 1.69$ 일 때

$$(1 + a)^5 = \sqrt{1.69} = \sqrt{1.3^2} = 1.3 \text{이므로}$$

1.3배로 증가하였다.

따라서 증가율은 30%

18. $a_n = 2n^2 + n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 인 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라고 할 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 250

해설

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= \{2(n+1)^2 + (n+1)\} - (2n^2 + n) \\ &= 4n + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} b_k &= \sum_{k=1}^{10} (4k + 3) \\ &= 4 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 3 \cdot 10 \\ &= 250 \end{aligned}$$

19. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이

$$a_n = \begin{cases} 2n+1 & (n \text{이 홀수}) \\ 2^{\frac{n}{2}} & (n \text{이 짝수}) \end{cases} \text{ 일 때, } a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2m} \text{의 값은?}$$

(단, m 은 자연수)

- ① $2m^2 + m + 2^m$
- ② $2m^2 + 2m + 2^{m+1}$
- ③ $2m^2 + m + 2^{m+1} - 2$
- ④ $2m^2 + m + 2^{m+1} - 1$
- ⑤ $2m^2 + m + 2^{m+1}$

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 홀수 번째 항으로 이루어진 수열은 3, 7, 11, 15, ...
이므로

공차가 4인 등차수열이고 처음 m 개의 항의 합은

$$\frac{m\{2 \cdot 3 + (m-1) \cdot 4\}}{2} = 2m^2 + m$$

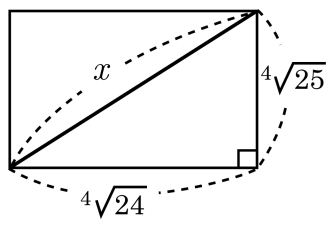
수열 $\{a_n\}$ 의 짝수 번째 항으로 이루어진 수열은 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 , ...

이므로 공비가 2인 등비수열이고 처음 m 개의 항의 합은

$$\frac{2(2^m - 1)}{2 - 1} = 2^{m+1} - 2$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2m} = 2m^2 + m + 2^{m+1} - 2$$

20. 가로와 세로의 길이가 각각 $\sqrt[4]{24}$, $\sqrt[4]{25}$ 인 직사각형의 대각선의 길이는?



- ① $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ ② $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ ③ 3
 ④ $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{(\sqrt[4]{24})^2 + (\sqrt[4]{25})^2} \\ &= \sqrt{\sqrt{24} + \sqrt{25}} \\ &= \sqrt{2\sqrt{6} + 5} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} \\ \therefore x &= \sqrt{3} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

21. 두 양수 A , $\frac{1}{A}$ 의 상용로그의 소수 부분을 각각 α , β 라고 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하여라. (단, $\alpha \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\log A$ 이 정수 부분을 n 이라고 하면 $\log A = \alpha + n$

$$\log \frac{1}{A} = \log A^{-1} = -\log A$$

$$= -(n + \alpha) = -n - \alpha$$

$$= (-n - 1) + (1 - \alpha)$$

따라서 $\log \frac{1}{A}$ 의 소수 부분은 $1 - \alpha$ 이므로 $\beta = 1 - \alpha$

$$\therefore \alpha + \beta = \alpha + (1 - \alpha) = 1$$

22. 7^{100} 은 85자리의 수이다. 이 때, 7^{10} 의 자릿수는?

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

7^{100} 은 85자리의 수이므로 $\log 7^{100}$ 의 지표는 84이다.

$$84 \leq \log 7^{100} \leq 85, 84 \leq 100 \log 7 \leq 85$$

$$0.84 \leq \log 7 \leq 0.85$$

$$0.84 \times 10 \leq 10 \log 7 \leq 0.85 \times 10$$

$$8.4 \leq \log 7^{10} \leq 8.5$$

따라서 $\log 7^{10}$ 의 지표가 8이므로 7^{10} 은 9자리의 수이다.

23. 등차수열 $\log 100, \log \frac{100}{2}, \log \frac{100}{4}, \log \frac{100}{8}, \dots$ 은 첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 처음으로 음수가 되는가?
- ① 제 11 항 ② 제 13 항 ③ 제 15 항
④ 제 17 항 ⑤ 제 19 항

해설

주어진 등차수열의 각 항을 정리해서 나열해 보면
 $2, 2 - \log 2, 2 - 2\log 2, 2 - 3\log 2, \dots$
즉, 이 수열은 첫째항이 2이고, 공차가 $-\log 2$ 인 등차수열이므로
첫째항부터 제 n 항까지의 합이 음수가 되려면
$$\frac{n\{2 \cdot 2 + (n-1) \cdot (-\log 2)\}}{2} < 0$$
$$n\{(-\log 2)n + (4 + \log 2)\} < 0$$
$$n\{(\log 2)n - (4 + \log 2)\} > 0$$
$$n > \frac{4 + \log 2}{\log 2} = \frac{4.3010}{0.3010} = 14. \times \times \times$$
따라서 주어진 수열은 첫째항부터 제15항까지의 합이 처음으로 음수가 된다.

24. 첫째항이 31, 공차가 -2인 등차수열에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 220인 모든 n 의 값의 합은?

① 10 ② 22 ③ 32 ④ 44 ⑤ 56

해설

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n\{2 \cdot 31 + (n-1) \cdot (-2)\}}{2} \\ &= n\{31 - (n-1)\} \\ &= n(32-n) \\ &= -n^2 + 32n = 220 \end{aligned}$$

$\therefore n$ 의 값의 합은 32

25. 다음은 등차중항과 등비중항, 조화중항 사이의 관계를 설명한 내용이다. ㉠ ㉡에 들어갈 내용이 알맞지 않은 것은?

두수 a, b 에 대하여 등차중항을 A , 등비중항을 G , 조화중항을 H 라고 하면
 $A = \frac{a+b}{2}, G = \textcircled{\text{㉠}}, H = \frac{\textcircled{\text{㉡}}}{a+b}$
이때 세 수의 관계는 다음과 같다.
 $A \geq G \geq H$ (단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립), $\textcircled{\text{㉢}} = G^2$
따라서 등비중항 G 는 등차중항 A 와 조화중항 H 의 $\textcircled{\text{㉣}}$ 이며, 세 수는 $\textcircled{\text{㉤}}$ 를 이룬다.

- ① $\textcircled{\text{㉠}}$ - $\sqrt{ab}$
- ② $\textcircled{\text{㉡}}$ - ab
- ③ $\textcircled{\text{㉢}}$ - $A \times H$
- ④ $\textcircled{\text{㉣}}$ - 등비중항
- ⑤ $\textcircled{\text{㉤}}$ - 등비수열

해설

세 수 a, x, b 가 이 순서로 조화수열을 이룰 때,

$\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, x = \frac{2ab}{a+b}$

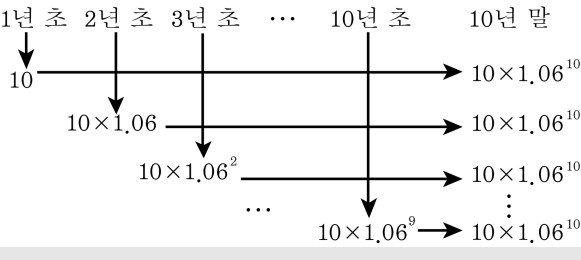
26. 정부가 통일 이후 필요한 비용을 마련하기 위해 예산의 일부를 2015년부터 매년 1월 1일 적립한다고 하자. 적립할 금액은 경제성장률을 감안하여 매년 전년도보다 6%씩 증액한다. 2015년 1월 1일부터 10조원을 적립하기 시작한다면 2024년 12월 31일 까지 적립된 금액의 원리합계는 몇 조원인지 구하여라. (단, 연이율 6%, 1년마다의 복리로 계산하고 $1.06^{10} = 1.8$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 180

해설

2015년 1월 1일 적립금이 10조원이므로 n 년 후의 적립금은 10×1.06^n (조원)이다.



따라서 구하는 적립금의 원리합계는
 $10 \times 10 \times 1.06^{10} = 10 \times 10 \times 1.8 = 180$ (조원)

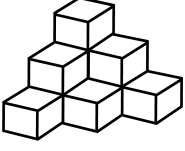
27. $\left[\frac{2k-1}{3}\right] = \frac{2k-1}{3}$ 을 만족하는 자연수 k 를 작은 수부터 차례로 나열한 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제40항까지의 합은?
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

- ① 1010 ② 1210 ③ 2020 ④ 2220 ⑤ 2420

해설

실수 x 에 대하여 $[x] = x$ 이면 x 는 정수이므로
 $\left[\frac{2k-1}{3}\right]$ 이 성립하려면 $\frac{2k-1}{3}$ 이 정수이어야 한다.
이때, $\frac{2k-1}{3}$ 이 정수가 되도록 하는 자연수 k 는 2, 5, 8, 11, ...
이므로
수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열을 이룬다.
따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 40항까지의 합은
$$\frac{40(2 \cdot 2 + 39 \cdot 3)}{2} = 20 \times 121 = 2420$$

28. 오른쪽 그림과 같이 3층탑을 쌓기 위해서는 10개의 정육면체가 필요하다. 이와 같은 모양의 탑을 10층으로 쌓을 때, 필요한 정육면체의 개수를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 220

해설

n 층으로 탑을 쌓을 때, 맨 위층에서부터 각 층에 필요한 정육면체의 수를 a_n 이라 하면

수열 $\{a_n\}$ 은 1, 3, 6, 10, 15, ...

이 때, 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면 $\{b_n\}$ 은 2, 3, 4, 5, ... 이므로 $b_n = n + 1$ 이다.

$$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = 1 + (2+3+4+\cdots+n) = \frac{n(n+1)}{2} (n \geq 1)$$

따라서 10층으로 탑을 쌓을 때 필요한 정육면체의 총 개수는

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_n &= \sum_{k=1}^{10} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} (\sum_{k=1}^{10} n^2 + \sum_{k=1}^{10} n) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (385 + 55) = 220 \end{aligned}$$

29. $a_4 = 1, a_8 = -11$ 이고, $\log_2 a_{n+1} = \log_2(a_n + a_{n+2}) - 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -17

해설

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2(a_n + a_{n+2}) - 1 \text{ 에서}$$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2(a_n + a_{n+2}) - \log_2 2$$

$$= \log_2 \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$$

따라서, 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_4 = a + 3d = 1, a_8 = a + 7d = -11$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 10, d = -3$

$$\therefore a_{10} = 10 + 9 \cdot (-3) = -17$$

30. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 5, a_{n+1} = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} a_n \ (n = 1, 2, 3, \dots)$ 을 만족
시킬 때, a_{10} 의 값은?

- ① $\frac{9}{4}$
- ② $\frac{11}{4}$
- ③ $\frac{13}{4}$
- ④ $\frac{15}{4}$
- ⑤ $\frac{17}{4}$

해설

$$a_{n+1} = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} a_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} a_n \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $n = 1, 2, 3, \dots, n$ 을 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2 = \frac{1 \cdot 3}{2^2} a_1$$

$$a_3 = \frac{2 \cdot 4}{3^2} a_2$$

$$a_4 = \frac{3 \cdot 5}{4^2} a_3$$

$$\vdots$$

$$\times \Bigg) a_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} a_{n-1}$$

$$\therefore a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$$

$$= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \dots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \dots a_{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{n+1}{2n} \cdot a_1$$

$$a_1 = 5 \text{ 를 대입하면 } a_n = \frac{5(n+1)}{2n}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{5 \cdot 11}{2 \cdot 10} = \frac{11}{4}$$

31. 수열 $\{a_n\}$ 이 자연수 n 에 대하여 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 을 만족할 때, 다음 중 $\sum_{k=51}^{100} a_k$ 와 같은 것은? (단, $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$)

- ① $a_{100} - a_{50}$
 ② $a_{101} - a_{50}$
 ③ $a_{101} - a_{51}$
- ④ $a_{102} - a_{51}$
 ⑤ $a_{102} - a_{52}$

해설

$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & a_1 = a_3 - a_2 \\ & a_2 = a_4 - a_3 \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$+) \frac{a_{100} = a_{102} - a_{101}}{\sum_{k=1}^{100} a_k = a_{102} - a_2}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & a_1 = a_3 - a_2 \\ & a_2 = a_4 - a_3 \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$+) \frac{a_{50} = a_{52} - a_{51}}{\sum_{k=1}^{50} a_k = a_{52} - a_2}$$

(i), (ii)에 의하여

$$\begin{aligned} \sum_{k=51}^{100} a_k &= \sum_{k=1}^{100} a_k - \sum_{k=1}^{50} a_k \\ &= (a_{102} - a_2) - (a_{52} - a_2) \\ &= a_{102} - a_{52} \end{aligned}$$

32. $x > 0$, $x \neq 1$ 일 때, $\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[k]{x^k}$ 을 만족하는 자연수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^2}\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^5}} = \sqrt[8]{x^5}$$

33. $\frac{2002!}{(1001!)^2}$ 의 끝자리에 오는 0의 개수를 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 200 ⑤ 400

해설

$n!$ 의 끝자리에 오는 0의 개수는 $n!$ 의 약수에서 10의 거듭제곱의 최대 지수와 같다. 또한 $n!$ 로 나눌 때, 5의 거듭제곱의 최대 지수이다.

일반적으로 $n!$ 의 소인수분해에서 소인수 p 의 거듭제곱의 최대 지수는

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \cdots \text{이다.}$$

그러므로 $\frac{2002!}{(1001!)^2}$ 의 약수에서

5의 거듭제곱의 최대 지수는

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2002}{5} \right] + \left[\frac{2002}{5^2} \right] + \left[\frac{2002}{5^3} \right] + \left[\frac{2002}{5^4} \right] \\ & - 2 \left(\left[\frac{1001}{5} \right] + \left[\frac{1001}{5^2} \right] + \left[\frac{1001}{5^3} \right] + \left[\frac{1001}{5^4} \right] \right) \\ & = (400 + 80 + 16 + 3) - 2(200 + 40 + 8 + 1) = 1 \end{aligned}$$