1. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$ 일 때, $2A + B$ 를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라.

$$
\begin{aligned}
2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\
&= (2a + 4b) + (2a + 3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\
&= 2a + (4b + 2a) + 3b && \text{㉡ 결합법칙} \\
&= 2a + (2a + 4b) + 3b && \text{㉢ 교환법칙} \\
&= (2a + 2a) + (4b + 3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\
&= (2 + 2)a + (4 + 3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\
&= 4a + 7b
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b)$: 결합법칙

2. x^3+x^2+2를 다항식 x^2+2x-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 나머지를 $R(x)$라 할 때, $Q(x)+R(x)$의 값은?

① $2x-3$　　② $2x$　　③ $3x+2$
④ $4x$　　⑤ $4x+1$

해설
x^3+x^2+2를 x^2+2x-1로 직접 나누면
$Q(x)=x-1,\ \ R(x)=3x+1$
$\therefore\ Q(x)+R(x)=4x$

3. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+2 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지가 $x+3$ 이 되도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-6$

해설

검산식을 사용

$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-x+1)\cdot A+(x+3)$

$A=(x+p)$

$x^3+ax^2+bx+2-(x+3)=(x^2-x+1)(x+p)$

$x^3+ax^2+(b-1)x-1=(x^2-x+1)(x-1)\ \ \therefore p=-1$

우변을 정리하면

$\therefore\ a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$

4. 다음 식 중에서 옳지 않은 것을 고르면?

① $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

② $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

③ $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

④ $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑤ $(a^2+a+1)(a^2-a+1) = a^4-a^2+1$

해설

⑤ $(a^2+a+1)(a^2-a+1) = (a^2+1)^2-a^2$
$= a^4+a^2+1$

5. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c=2$, $a^2+b^2+c^2=6$, $abc=-1$ 일 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^3+2(ab+bc+ca)$
$ab+bc+ca=-1$
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=2\times(6-(-1))-3=11$

6. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 $(x-1)^2$을 나누었을 때 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로

x^3+ax^2+bx+3

$=(x-1)^2(x+k)+2x+1$

$=x^3+(k-2)x^2+(3-2k)x+k+1$

양변의 계수를 비교하면

$a=k-2,\ b=3-2k,\ 3=k+1$

$k=2$이므로 $a=0,\ b=-1$

$\therefore\ a-b=0-(-1)=1$

7. 다음 중 옳지 않은 것은?

① -2의 제곱근은 $\sqrt{2}i$와 $-\sqrt{2}i$이다.

② $\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = -\sqrt{(-2)(-3)}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}} = \sqrt{\dfrac{-8}{-2}}$

⑤ $-\sqrt{-16} = -4i$

해설

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2i} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

8. $|x-y|+(y-2)i=5x-2-3xi$를 만족하는 실수를 x, y라 할 때, $\frac{x}{y}$의 값은? (단, $i^2=-1$)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

(i) $x \ge y$일 때,

$(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$

$x-y=5x-2$, $y-2=-3x$

$\therefore x=0$, $y=2$($x<y$이므로 부적합)

(ii) $x<y$일 때,

$-(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$

$-x+y=5x-2$, $y-2=-3x$

$\therefore x=\frac{4}{9}$, $y=\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{x}{y}=\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{2}{3}$

9. 두 실수 a, b 에 대하여 복소수 $z = a + bi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$ 의 곱 $z \cdot \bar{z} = 9$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{9}{z}\right)$ 를 간단히 하면?

① b　② $2b$　③ 0　④ $5a$　⑤ a

해설

$z \cdot \bar{z} = 9$ 이므로 $\bar{z} = \frac{9}{z}$

$\therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{9}{z}\right) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$ 이므로

$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$

10. 실수 a, b 에 대하여 $(a+b-5)^2 + \sqrt{(ab+3)^2} = 0$, $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 일 때, $a-b$ 의 값은?

① $-\sqrt{13}$　　② $-\sqrt{37}$　　③ $\sqrt{19}$

④ $\sqrt{13}$　　⑤ $\sqrt{37}$

해설

$(a+b-5)^2 + \sqrt{(ab+3)^2} = (a+b-5)^2 + |ab+3| = 0 \rightarrow$
$a+b=5, ab=-3,\ (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 37$
$a-b = \pm\sqrt{37} \cdots$ ①
$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ 가 성립하려면, $a < 0$ 그리고 $b \geqq 0$ 일 때이다.
$\therefore a-b < 0$ 이므로 ①에서 $a-b = -\sqrt{37}$

11. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$의 값은?

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10}$$

① 0　② -1　③ 1　④ -10　⑤ 10

해설

우변을 통분하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면,

$$(\text{우변}) = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})x^9 + \cdots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$$

양변의 계수를 비교하면

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0$

12. 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle\mathrm{ABC}$에 대하여 $a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$인 관계가 성립할 때, $\triangle\mathrm{ABC}$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 정삼각형

해설

$a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$에서 $a^2-ab+b^2=ac+bc-c^2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

즉, $\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, $\triangle\mathrm{ABC}$는 정삼각형이다.

13. 두 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=7$, $x+y=3$ 일 때, x^5+y^5의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 123

해설

$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$에서 $3^2 = 7+2xy$, $xy=1$
$(x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y)$에서 $x^3+y^3=18$

$$\begin{aligned} x^5+y^5 &= (x^2+y^2)(x^3+y^3) - x^2y^2(x+y) \\ &= 7\times18 - 1^2\times3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

14. 2가 아닌 모든 실수 x에 대하여 $\frac{ax^2+4x+b}{x-2}$의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\frac{ax^2+4x+b}{x-2}=k$라 하면

$ax^2+4x+b=k(x-2)$

$ax^2+(4-k)x+b+2k=0$

x에 대한 항등식이므로

$a=0$

$4-k=0$에서 $k=4$

$b+2k=0$에서 $b=-8$

$\therefore\ a-b=8$

해설

주어진 식이 모든 x에 대해 일정한 값을 가지려면

분자인 ax^2+4x+b가 분모인 '$x-2$' 만을 인수로 가져야 한다.

즉, 분자가 $k(x-2)$가 되어야 한다.

$\frac{ax^2+4x+b}{x-2}=\frac{4(x-2)}{x-2}=4$

$\therefore a=0,\ b=-8$에서 $a-b=8$

15. 등식 $\frac{2x^2+13x}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$ 가 x에 대한 항등식이 되도록 상수 $A,\ B,\ C$의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

양변에 $(x+2)(x-1)^2$을 곱하면
$2x^2+13x=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$에서
$x=1,\ -2,\ 0$을 차례로 대입하여 $A,\ B,\ C$를 구하면
$B=5,\ C=-2,\ A=4$
$\therefore\ A+B+C=7$

16. 모든 실수 x에 대하여 $x^{10}+1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{10}(x-1)^{10}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x=0$을 대입하면
$1=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}\cdots$ ①
양변에 $x=2$을 대입하면
$2^{10}+1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}\cdots$ ②
① + ②에 의해
$2^{10}+2=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10})$
$\therefore (a_0+a_2+\cdots+a_{10})=2^9+1=513$

17. x^{30}을 $x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $Q(x)$의 상수항을 포함한 모든 계수들의 합을 구하면?

① $3^{30}+1$　② $3^{30}-1$　③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
④ $\frac{1}{3}(3^{30}-1)$　⑤ 0

해설

$x^{30}=(x-3)Q(x)+R$
양변에 $x=3$을 대입 하면, $3^{30}=R$
$x^{30}=(x-3)Q(x)+3^{30}$
양변에 $x=1$을 대입하면, $1=-2Q(1)+3^{30}$
$\therefore\ Q(1)=\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
※ 다항식에서 상수항을 포함한 모든 계수의 합은 문자대신 1을 대입한 값과 같다.

18. 정식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때 3이 남고, x^2-4x+3으로 나눌 때 $3x$가 남는다. $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때, 나머지를 구하면?

① $6x-1$　　② $6x-2$　　③ $6x-3$

④ $6x-5$　　⑤ $6x-9$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q_1(x)+3 \\ &= (x-1)(x-2)Q_1(x)+3 \cdots\cdots ㉠ \\ f(x) &= (x^2-4x+3)Q_2(x)+3x \\ &= (x-1)(x-3)Q_2(x)+3x \cdots\cdots ㉡ \\ f(x) &= (x^2-5x+6)Q(x)+ax+b \\ &= (x-2)(x-3)Q(x)+ax+b \cdots\cdots ㉢ \end{aligned}$$

㉠, ㉢에서 $f(2)=3=2a+b$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉡, ㉣에서 $f(3)=9=3a+b$ $\cdots\cdots$ ㉤

$\therefore$ ㉣, ㉤에서 $a=6$, $b=-9$

$\therefore$ 나머지는 $6x-9$

19. 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+2,\ xf(x)+2$가 모두 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어질 때, $f(1)$의 값을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$$\begin{cases} f(x) = (x-\alpha)Q(x) - 2 \ \cdots ㉠ \\ xf(x) = (x-\alpha)Q'(x) - 2 \ \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ $\times\, x =$ ㉡에서

$xf(x) = (x-\alpha)Q(x) - 2x$

$= (x-\alpha)Q(x) - 2(x-\alpha) - 2\alpha$

$= (x-\alpha)\{Q(x) - 2\} - 2\alpha$

$\therefore\ -2\alpha = -2$

$\therefore\ \alpha = 1$

$\therefore\ f(x) = (x-1)Q(x) - 2$

$\therefore\ f(1) = -2$

해설

$f(x)+2,\ xf(x)+2$가 모두 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지므로

$f(\alpha)+2=0 \therefore\ f(\alpha) = -2 \cdots$ ①

$\alpha f(\alpha) + 2 = 0 \cdots$ ②

①, ②에서 $\alpha = 1$

$\therefore\ f(1) = f(\alpha) = -2(\because$ ①$)$

20. x^{30}을 $x-3$으로 나눌 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 $Q(x)$의 계수의 총합(상수항 포함)과 R과의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{29}+1)$ ② $\frac{1}{2}\cdot 3^{30}$ ③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
④ $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$ ⑤ $\frac{1}{2}(3^{29}-1)$

해설

$x^{30}=(x-3)Q(x)+R$

$x=3$을 대입하면 $3^{30}=R$

$Q(x)$의 계수의 총합은 $Q(1)$과 같으므로

$x=1$을 대입하면 $1=-2Q(1)+3^{30}$

$\therefore\ Q(1)=\dfrac{3^{30}-1}{2}$

$\therefore\ R-Q(1)=3^{30}-\dfrac{3^{30}-1}{2}=\dfrac{3^{30}+1}{2}=\dfrac{1}{2}(3^{30}+1)$

21. x 의 다항식 $f(x) = x^5 - ax - 1$ 이 계수가 정수인 일차인수를 갖도록 정수 a 의 값을 구하면?

① $a = 0$ 또는 2　② $a = 1$ 또는 2　③ $a = -1$ 또는 2
④ $a = 0$ 또는 1　⑤ $a = 0$ 또는 -2

해설

상수항이 -1 이므로 만일 일차인수가 있다면 그것은 $x - 1$ 또는 $x + 1$ 뿐이다.
(i) $f(1) = 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = 0$
(ii) $f(-1) = -1 + a - 1 = 0$ 에서 $a = 2$

22. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$[x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y]$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y$
$= (x-y)(x^2+xy+y^2) + xy(x-y) + 2(x+y)(x-y) + (x-y)$
$= (x-y)\{(x+y)^2 + 2(x+y) + 1\}$
$= (x-y)(x+y+1)^2$
$p = -1, q = 1, r = 1$
$\therefore\ p^2 + q^2 + r^2 = 3$

23. 다항식 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$가 이차다항식의 완전제곱꼴이 되도록 a의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$
$=(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+a$
$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+a$
$x^2+8x=A$로 놓으면
(준식) $=(A+7)(A+15)+a$
$=A^2+22A+105+a$
$=(A+11)^2-16+a$
따라서, $a=16$일 때 이차식 $x^2+8x+11$의 완전제곱식이 된다.

24. $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2(ac+bd)$를 바르게 인수분해 한 것은?

① $(a+b-c-d)(a-b+c+d)$

② $(a+b+c+d)(a-b+c-d)$

③ $(a+b+c-d)(a-b+c+d)$

④ $(a-b+c-d)(a-b+c+d)$

⑤ $(a+b+c+d)(a-b-c+d)$

해설

$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2(ac+bd)$
$= (a^2+2ac+c^2) - (b^2 - 2bd + d^2)$
$= (a+c)^2 - (b-d)^2$
$= (a+b+c-d)(a-b+c+d)$

25. 다음 중 다항식 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a-b$　　② $b-c$　　③ $c-a$

④ $a+b+c$　　⑤ $a-b+c$

해설

주어진 식을 a에 관하여 정리하면

(준식)$= a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$

$= (b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$= (b-c)\{b^2(c-a)+b(c^2-ca)-a(c^2-a^2)\}$

$= (b-c)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$

$= (b-c)(c-a)\{c(b-a)+(b^2-a^2)\}$

$= (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$

26. 세 변의 길이가 $a,\ b,\ c$인 삼각형에 대하여 $(a^2+b^2)c+(a+b)c^2=(a+b)(a^2+b^2)+c^3$이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $b=c$인 이등변 삼각형
② a가 빗변인 직각삼각형
③ $a=c$인 이등변 삼각형
④ c가 빗변인 직각삼각형
⑤ 정삼각형

해설

준식을 c에 관한 내림차순으로 정리하면
$c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+(a+b)(a^2+b^2)$에서
$c^2\{c-(a+b)\}-(a^2+b^2)\{c-(a+b)\}$
$=\{c-(a+b)\}\{c^2-(a^2+b^2)\}$
$=(c-a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$
$a\ ,b\ ,c$ 는 삼각형의 세변이므로
$c-a-b\neq 0$이고 $c^2-a^2-b^2=0$
즉 $c^2=a^2+b^2$이므로 c가 빗변인 직각 삼각형이다.

27. 인수분해 공식 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$을 이용하여 $\dfrac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1}$을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10000

해설

$9999 = a$라 하면

$$\frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1} = \frac{a^3 + 1}{(a-1)a + 1}$$
$$= \frac{(a+1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1}$$
$$= a + 1 = 10000$$

28. 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $[a,\ b,\ c] = a^2 + bc$라 하고 $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 + z^2 = 12$일 때, $[x,\ 2y,\ z] + [y,\ 2z,\ x] + [z,\ 2x,\ y]$의 값은?

① 10　② 22　③ 88　④ 100　⑤ 144

해설

$[x,\ 2y,\ z] + [y,\ 2z,\ x] + [z,\ 2x,\ y]$
$= x^2 + 2yz + y^2 + 2zx + z^2 + 2xy$
$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
$= (x + y + z)^2 = 100$

29. 정수 n에 대해 $z = i^n + i^{-n}, i = \sqrt{-1}$을 만족하는 z의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개
④ 4개 ⑤ 4개보다 많다.

해설

정수 n 에 대하여 $i^n = i$ 또는 -1 또는 $-i$ 또는 1,
$i^n = i$ 이면 $i^{-n} = -i$, $i^n = -1$ 이면
$i^{-n} = -1$, $i^n = -i$ 이면
$i^{-n} = i$, $i^n = 1$ 이면
$i^{-n} = 1$
$\therefore\ i^n + i^{-n} = 0, -2, 0, 2$
$\therefore\ z$는 3개다.

30. 복소수 α, β 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha+\overline{\alpha}$ 는 실수이다.
㉡ $\alpha-\overline{\alpha}$ 는 허수이다.
㉢ α^2 이 실수이면 α 도 실수이다.
㉣ $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ 이고 $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$ 이다.

① ㉠, ㉡　　② ㉠, ㉢　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉣　　⑤ ㉡, ㉣

해설

$\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$ (a, b, c, d 는 실수)라 하면

㉠ $\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (실수)

$\therefore$ 참

㉡ α 가 실수이면 $\alpha=\overline{\alpha}$ 이므로 $\alpha-\overline{\alpha}=0$ 이다.

따라서 $\alpha-\overline{\alpha}$ 가 반드시 허수인 것은 아니다.

$\therefore$ 거짓

㉢ $i^2=-1$ 은 실수이지만 i 는 순허수이다.

$\therefore$ 거짓

㉣
$$\begin{aligned}\overline{\alpha+\beta}&=\overline{(a+c)+(b+d)i}\\&=(a+c)-(b+d)i\\&=(a-bi)+(c-di)\\&=\overline{\alpha}+\overline{\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta}&=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}\\&=(ac-bd)-(ad+bc)i\\&=(a-bi)(c-di)\\&=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}\end{aligned}$$

$\therefore$ 참

31. x, y 가 실수이고, 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 와의 곱이 $z \cdot \bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)i$ 의 값은?

① $\frac{y}{2}$ ② $-y$ ③ $2x$ ④ $\frac{-x}{2}$ ⑤ 100

해설

$z \cdot \bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.

그러므로 $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)i = \frac{1}{2}(z - \bar{z})i$

$$= \frac{1}{2}(x + yi - x + yi)i$$

$$= \frac{1}{2}(2yi)i = -y$$

32. 복소수 $z = a + bi$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$(1 + i + z)^2 < 0$ $\qquad z^2 = c + 4i$

이 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$(1 + i + z)^2 < 0$ 에서 $1 + i + z$ 는 순허수이다.

$z = a + bi$ 라면

$1 + i + z = 1 + i + a + bi = (1 + a) + (1 + b)i$

이것이 순허수이므로 $1 + a = 0$, $a = -1$

$\therefore\ z = -1 + bi$

또한 $z^2 = c + 4i$ 에서 $(-1 + bi)^2 = c + 4i$

$1 - 2bi - b^2 = c + 4i$

$\therefore\ -2b = 4$, $1 - b^2 = c$

$\therefore\ b = -2,\ c = -3$

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = 14$

33. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$는 z 의 켤레복소수)

㉠ $\alpha^2+\alpha+1=0$ ㉡ $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}=1$ ㉢ $z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$ 일 때, $z\bar{z}=\dfrac{7}{3}$

① ㉠　② ㉠ , ㉡　③ ㉠ , ㉢
④ ㉡ , ㉢　⑤ ㉠ , ㉡ , ㉢

해설

㉠ $:\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\alpha+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2+\alpha+1=0$

㉡ $:(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$, $\alpha^3=1$

$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}$

$=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3(1+\alpha+\alpha^2)+\cdots+\alpha^{15}=\alpha^{15}$

$=(\alpha^3)^5=1$ ($\because \alpha^2+\alpha+1=0$)

㉢ $:\overline{\alpha}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\alpha+\overline{\alpha}=-1, \alpha\overline{\alpha}=1$

$z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$, $\bar{z}=\dfrac{\overline{\alpha}+3}{2\overline{\alpha}+1}$

$z\bar{z}=\dfrac{\alpha\overline{\alpha}+3(\alpha+\overline{\alpha})+9}{4\alpha\overline{\alpha}+2(\alpha+\overline{\alpha})+1}=\dfrac{1-3+9}{4-2+1}=\dfrac{7}{3}$

해설

㉢ 이 성립함을 다음과 같이 직접 계산할 수 있다.

$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow 2\alpha+1=\sqrt{3}i, \alpha+3=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}$

$=-\dfrac{5i-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$z\cdot\bar{z}=\dfrac{\sqrt{3}-5i}{2\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}+5i}{2\sqrt{3}}=\dfrac{7}{3}$