

1. 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① -2 는 -16 의 네제곱근이다.
- ② 4 는 16 의 세제곱근이다.
- ③ 8 의 세제곱근은 2 뿐이다.
- ④ 81 의 네제곱근은 $3, -3$ 이다.
- ⑤ -4 는 -64 의 세제곱근이다.

해설

① $(-2)^4 = 16 \neq -16$ 이므로 -2 는 -16 의 네제곱근이 아니다.

② $4^3 = 64 \neq 16$ 이므로 4 는 16 의 세제곱근이 아니다.

③ 8 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = 8$ 이므로

$$x^3 - 8 = 0$$

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -1 \pm \sqrt{3}i$$

따라서, 8 의 세제곱근은 2 외에도 $-1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$ 가 있다.

④ 81 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 81$ 이므로

$$x^4 - 81 = 0$$

$$(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$$

$$(x + 3)(x - 3)(x^2 + 9) = 0$$

$$\therefore x = \pm 3 \text{ 또는 } x = \pm 3i$$

따라서, 81 의 네제곱근은 $3, -3$ 외에도 $3i, -3i$ 가 있다.

⑤ $(-4)^3 = -64$ 이므로 -4 는 -64 의 세제곱근이다.

2. -8 의 세제곱근 중에서 실수를 a , 16 의 네제곱근 중에서 실수를 b 라 할 때, $a + b^2$ 의 값을 구하면?

① 0

② 2

③ 4

④ 6

⑤ 8

해설

$$a = -2$$

$$b = 2 \text{ or } -2$$

$$a + b^2 = -2 + 4 = 2$$

3. 다음 중 옳은 것을 고르면?

① 8의 세제곱근은 $\sqrt[3]{8}$ 한 개다.

② -1의 세제곱근 중 실수는 존재하지 않는다.

③ n 이 홀수일 때, 5의 n 제곱근 중 실수인 것은 한 개다.

④ n 이 짝수일 때, 16의 n 제곱근 중 실수인 것은 ± 3 이다.

⑤ -81의 네제곱근 중 실수인 것은 ± 3 이다.

해설

$x^n = a$ 인 실수 x 의 개수는 다음과 같다.

(i) n 이 홀수일 때, 실수 x 는 $\sqrt[n]{a}$ 로 1개 이다.

(ii) n 이 짝수일 때,

$a > 0 \rightarrow$ 실수 x 는 $\pm \sqrt[n]{a}$ 로 2개 이다.

$a = 0 \rightarrow$ 실수 x 는 0이므로 1개 이다.

$a < 0 \rightarrow$ 실수 x 는 존재하지 않는다.

① $n = 3$ 이므로 실수인 세제곱근은 1개

② $n = 3$ 이므로 실수인 세제곱근은 1개

③ n 이 홀수이므로 실수인 n 제곱근은 1개

④ n 이 짝수이고 $16 > 0$ 이므로 실수인 n 제곱근은 2개

⑤ $n = 4$ 이고, $-81 < 0$ 이므로 실수인 n 제곱근은 존재하지 않는다.

4. $(\sqrt[5]{2})^4 \times \sqrt[5]{64}$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ $\sqrt[5]{128}$

④ 4

⑤ $\sqrt[5]{512}$

해설

$$2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{6}{5}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2 = 4$$

5. $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ 를 간단히 하면?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

6. $\sqrt[3]{9^4} \div \sqrt{3^3} \times \sqrt[6]{\frac{1}{3}}$ 의 값을 구하면?

① 9

② 3

③ $\sqrt{3}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{9^4} \div \sqrt{3^3} \times \sqrt[6]{\frac{1}{3}} &= (3^2)^{\frac{4}{3}} \div 3^{\frac{3}{2}} \times (3^{-1})^{\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{8}{3} - \frac{3}{2} - \frac{1}{6}} \\ &= 3\end{aligned}$$

7. $\sqrt[3]{(-2)^3} + \sqrt[4]{(-3)^4}$ 을 간단히 하면?

① -5

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 5

해설

$$-2 + 3 = 1$$

8. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3}$ 을 간단히 하면?

- ① $\sqrt[6]{a}$ ② $\sqrt[6]{b}$ ③ $\sqrt[6]{ab}$ ④ $\sqrt[6]{a^2b}$ ⑤ $\sqrt[6]{ab^2}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3} \\ &= (a^2b^3)^{\frac{1}{6}} \times (ab)^{\frac{1}{2}} \div (a^2b^3)^{\frac{1}{3}} \\ &= a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{2}{3}}b = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1} \\ &= a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a} \end{aligned}$$

9. 양의 실수 a 에 대하여 $\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}}$ 의 값은?(단, $a \neq 1$)

- ① $\sqrt[10]{a}$ ② $\frac{1}{\sqrt[10]{a}}$ ③ 1 ④ $\frac{1}{\sqrt[15]{a}}$ ⑤ $\sqrt[10]{a}$

해설

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}} &= \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a}}} \\ &= \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[5]{\sqrt{a}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[15]{a}}{\sqrt[10]{a}} \times \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[15]{a}} = \frac{1}{\sqrt[15]{a}} \end{aligned}$$

10. $a > 0$ 일 때, $\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt{a}$

② $\sqrt[3]{a}$

③ $\sqrt[3]{a^2}$

④ $\sqrt[4]{a}$

⑤ $\sqrt[6]{a}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}} &= \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}} \times \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[6]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[12]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^2}}{\sqrt[6]{a}} = \\ \sqrt[6]{\frac{a^2}{a}} &= \sqrt[6]{a}\end{aligned}$$

11. $a > 0, a \neq 1$ 일 때, $\sqrt[3]{a \sqrt[3]{a \sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}}} = a^k$ 을 만족시키는 유리수 k 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{8}$

⑤ $\frac{1}{9}$

해설

$$\begin{aligned}
 & \sqrt[3]{a \sqrt[3]{a \sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}}} \\
 &= \sqrt[3]{a \sqrt[3]{a \cdot a^{\frac{1}{4}}}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{a^{\frac{1}{2}}}}} \\
 &= \sqrt[3]{a \cdot \left(a^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}} \\
 &= \sqrt[3]{a \cdot a^{\frac{5}{12}}} \times \sqrt[3]{\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}} \\
 &= \left(a^{\frac{17}{12}}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(a^{\frac{1}{12}}\right)^{\frac{1}{3}} \\
 &= a^{\frac{17}{36} + \frac{1}{36}} = a^{\frac{18}{36}} = a^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

12. 양의 실수 a 에 대하여 $\sqrt{\frac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[4]{a}}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}} = \sqrt[n]{a^n}$ 이 성립할 때, 자연수 n 의 값은?

① 3

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 16

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[4]{a}}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}} &= \frac{\sqrt{\sqrt[6]{a^7}}}{\sqrt{\sqrt[4]{a}}} \times \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[12]{a}} \\&= \frac{\sqrt[12]{a^7}}{\sqrt[8]{a}} \times \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[12]{a}} \\&= \frac{\sqrt[12]{a^7}}{\sqrt[12]{a}} = \sqrt[12]{\frac{a^7}{a}} \\&= \sqrt[12]{a^6} = \sqrt{a} = \sqrt[8]{a^4}\end{aligned}$$

$$\therefore n = 4$$

13. $\frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{6}}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

② $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

③ $\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

④ $\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$

⑤ $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$

해설

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{6}} &= \frac{\sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{3 \cdot 2}} \\ &= \frac{2 + \sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{2 + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}(2 + \sqrt[3]{3})} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

14. $\sqrt[3]{a \sqrt{a} \times \frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$ 를 간단히 하면?

① $\sqrt[4]{a^3}$

② $\sqrt[6]{a^5}$

③ $\sqrt[13]{a^5}$

④ $\sqrt[7]{a^8}$

⑤ $\sqrt{a^5}$

해설

$$\sqrt[3]{a \sqrt{a} \times \frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$$

$$= \sqrt[3]{a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a \cdot a^{-\frac{1}{4}}}$$

$$= (a^{1+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{9}{4}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$$

15. 등식 $\sqrt[4]{a \sqrt{\sqrt[3]{a^2}}} = 27$ 을 만족하는 양수 a 의 값은?

① 3

② 3^2

③ 3^3

④ 3^6

⑤ 3^9

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{a \sqrt{\sqrt[3]{a^2}}} &= \left\{ a \left(a^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{4}} \\ &= \left(a \cdot a^{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left(a^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

$$a^{\frac{1}{3}} = 3^3 \text{ 이므로 } \left(a^{\frac{1}{3}} \right)^3 = (3^3)^3$$

$$\therefore a = 3^9$$

16. $6^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}$ 의 값은?

① 9

② 18

③ 27

④ 36

⑤ 45

해설

$$\begin{aligned} 6^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} &= (2 \times 3)^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{3}{3}} \times 3^{\frac{6}{3}} \\ &= 2 \times 3^2 \\ &= 18 \end{aligned}$$

17. 다음 식의 값은?

$$2^2 \times 2^{-3}$$

① -1

② $-\frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{2}$

④ 1

⑤ 2

해설

$$2^2 \times 2^{-3} = 2^{2+(-3)} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

18. 다음 식의 값은?

$$2^8 \times 3^5 \times 6^{-6}$$

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{8}{3}$

④ $\frac{3}{8}$

⑤ $\frac{16}{9}$

해설

$$\begin{aligned} 2^8 \times 3^5 \times 6^{-6} &= 2^8 \times 3^5 \times (2 \times 3)^{-6} \\ &= 2^8 \times 3^5 \times 2^{-6} \times 3^{-6} \\ &= 2^{8+(-6)} \times 3^{5+(-6)} \\ &= 2^2 \times 3^{-1} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

19. $12^3 \times 2^{-4} \div 3^2$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 12

⑤ 24

해설

$$\begin{aligned}(2^2 \times 3)^3 \times 2^{-4} \times 3^{-2} &= 2^6 \times 3^3 \times 2^{-4} \times 3^{-2} \\ &= 2^2 \times 3 = 12\end{aligned}$$

20. $\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}^{-\frac{8}{3}}$ 을 간단히 하면?

① -16

② -4

③ 4

④ 8

⑤ 16

해설

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4} \times (-\frac{8}{3})} = \left(\frac{1}{4}\right)^{(-2)} = 2^{-2 \times (-2)} = 2^4 = 16$$

21. $\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{9}{4}}$ 의 값은?

① $\frac{8}{27}$

② $\frac{16}{61}$

③ $\frac{81}{16}$

④ $\frac{27}{8}$

⑤ $\frac{64}{81}$

해설

$$\begin{aligned}\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{9}{4}} &= \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{2}{3} \times \frac{9}{4}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} \\&= \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2 \times (-\frac{3}{2})} = \left(\frac{2}{3}\right)^{(-3)} \\&= \left(\frac{8}{27}\right)^{-1} = \frac{27}{8}\end{aligned}$$

22. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7}{a^{-3} + a^{-4} + a^{-5} + a^{-6} + a^{-7} + a^{-8} + a^{-9}}$$

① a^8

② a^9

③ a^{10}

④ a^{11}

⑤ a^{12}

해설

분자, 분모에 a^{10} 을 곱하면

$$\frac{a^{10} \times (a + a^2 + \cdots + a^7)}{a^7 + a^6 + \cdots + a^2 + a} = a^{10}$$

23. $3^{\frac{5}{2}} \cdot (9^{\frac{7}{4}} + 27^{\frac{3}{2}}) \cdot 81^{-\frac{3}{2}}$ 를 계산하면?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$3^{\frac{5}{2}} \cdot 9^{\frac{7}{4}} \cdot 81^{-\frac{3}{2}} + 3^{\frac{5}{2}} \cdot 27^{\frac{3}{2}} \cdot 81^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 3^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{7}{2}} \cdot 3^{-6} + 3^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{9}{2}} \cdot 3^{-6}$$

$$= 3^{\frac{5}{2} + \frac{7}{2} - 6} + 3^{\frac{5}{2} + \frac{9}{2} - 6} = 3^0 + 3^1 = 1 + 3 = 4$$

24. 다음 식을 간단히 하면?

$$20^{\frac{2}{3}} \times 4^{-\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{6}}$$

① $2\sqrt{2}$

② 2

③ $\sqrt{5}$

④ 5

⑤ $\sqrt{20}$

해설

$$20^{\frac{2}{3}} = (4 \times 5)^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} \text{ 이므로}$$

$$20^{\frac{2}{3}} \times 4^{-\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{6}} = (4^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}) \times 4^{-\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{6}}$$

$$= (4^{\frac{2}{3}} \times 4^{-\frac{2}{3}}) \times (5^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{6}})$$

$$= 4^{\frac{2}{3} + (-\frac{2}{3})} \times (5^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{6}})$$

$$= 4^{\frac{2}{3} + (-\frac{2}{3})} \times 5^{\frac{2}{3} + (-\frac{1}{6})}$$

$$= 4^0 \times 5^{\frac{1}{2}} = 1 \times \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

25. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{\frac{7}{8}}$

㉡ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2$

㉢ $(3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = 9$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$\begin{aligned}\text{㉠ } \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = 2^{\frac{7}{8}} \\ &\therefore \text{참}\end{aligned}$$

$$\text{㉡ } \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8 \quad \therefore \text{거짓}$$

$$\text{㉢ } (3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = (3^{\sqrt{2}})^2 = 3^{2\sqrt{2}} \quad \therefore \text{거짓}$$

26. $x = 2$ 일 때, $x^{x^{x^x}}$ 의 값을 구하면?

① 2^2

② 2^4

③ 2^8

④ 2^{16}

⑤ 2^{32}

해설

$$x^{x^{x^x}} = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16}$$

27. $a^{2x} = \sqrt{2} - 1$ 일 때, $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 값은?

① $\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2}$

③ $\sqrt{2} - 1$

④ $2\sqrt{2} - 1$

⑤ $2\sqrt{2} - 2$

해설

$$a^{-2x} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

주어진 식의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면,

$$\begin{aligned}\frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} + 1} &= \frac{(\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1) + 1} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

28. $2^x = 3$ 일 때, $\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{8}$

② $\frac{3}{13}$

③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{3}{8}$

⑤ $\frac{3}{7}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}} &= \frac{2^x - \frac{1}{2^x}}{(2^x)^2 - \frac{1}{(2^x)^2}} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{3}}{3^2 - \frac{1}{3^2}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{80}{9}} = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

29. $2^{2x} = 3$ 일 때, $\frac{2^x + 2^{-x}}{2^{3x} + 2^{-3x}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{2}{7}$

③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{3}{7}$

⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 식의 분모와 분자에 2^{3x} 를 곱하면

$$\begin{aligned}\frac{2^x + 2^{-x}}{2^{3x} + 2^{-3x}} &= \frac{(2^x + 2^{-x}) \times 2^{3x}}{(2^{3x} + 2^{-3x}) \times 2^{3x}} \\&= \frac{2^{4x} + 2^{2x}}{2^{6x} + 1} = \frac{(2^{2x})^2 + 2^{2x}}{(2^{2x})^3 + 1} \\&= \frac{3^2 + 3}{3^3 + 1} = \frac{3}{7}\end{aligned}$$

30. $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2$ 일 때, $\frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}}$ 의 값은? (단, $a > 0$)

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{6}{5}$

⑤ $\frac{7}{6}$

해설

$$\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2 \text{ 에서 } a^x + a^{-x} = 2(a^x - a^{-x}) \text{ 이므로}$$

$$a^x = 3a^{-x} \quad \therefore a^{2x} = 3$$

$$\therefore \frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{4}$$

31. 실수 a, b, c, d 에 대하여 $2^a = c, 2^b = d$ 일 때, 4^{a+b} 와 같은 것은?

① $\frac{1}{cd}$

② $\frac{1}{2cd}$

③ $\frac{1}{c^2d}$

④ cd

⑤ c^2d^2

해설

$$4^{a+b} = (2^2)^{a+b} = 2^{2a} \cdot 2^{2b} = (2^a)^2 \cdot (2^b)^2 = c^2d^2$$

32. $a = 4^3$ 일 때, 8^9 을 a 에 관한 식으로 나타내면?

① a^2

② $a^{\frac{5}{2}}$

③ a^3

④ $a^{\frac{7}{2}}$

⑤ $a^{\frac{9}{2}}$

해설

$$a = 4^3 = (2^2)^3 = 2^6 \quad \therefore 2 = a^{\frac{1}{6}}$$

$$8^9 = (2^3)^9 = 2^{27} = (a^{\frac{1}{6}})^{27} = a^{\frac{27}{6}} = a^{\frac{9}{2}}$$

33. $3^x = 5$ 일 때, $(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}}$ 의 값을 구하면?

① 3

② $\sqrt{3}$

③ 5

④ $\sqrt{5}$

⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}} = (3^{-4})^{-\frac{x}{4}} = 3^x = 5$$

34. 실수 x, y 에 대하여 $57^x = 27$, $513^y = 81$ 일 때, $\frac{3}{x} - \frac{4}{y}$ 의 값은?

㉠ -2

㉡ -1

㉢ 0

㉣ 1

㉤ 2

해설

$$57^x = 27 = 3^3 \text{ 에서 } 57 = (3^3)^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{3}{x}} \dots \textcircled{㉠}$$

$$513^y = 81 = 3^4 \text{ 에서 } 513 = (3^4)^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{4}{y}} \dots \textcircled{㉡}$$

㉠ $\div$ ㉡을 하면

$$\frac{1}{9} = 3^{\frac{3}{x}} \div 3^{\frac{4}{y}} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}}$$

$$3^{-2} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}}$$

$$\therefore \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -2$$

35. 양수 a, b, c 가 $abc = 9$, $a^x = b^y = c^z = 81$ 을 만족시킬 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ 1

⑤ 2

해설

$$a = 81^{\frac{1}{x}}, b = 81^{\frac{1}{y}}, c = 81^{\frac{1}{z}}$$

$$abc = 81^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$$

$$9 = 9^{2(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})}$$

$$1 = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$

36. $60^a = 3$, $60^b = 5$ 일 때, $12^{\frac{(1-a-b)}{2(1-b)}}$ 는?

① $\sqrt{3}$

② 2

③ $\sqrt{5}$

④ 3

⑤ $\sqrt{12}$

해설

$60^a = 3$, $60^b = 5$ 에서 두 식을 곱하면 $60^{a+b} = 15$

$$\frac{60}{60^{a+b}} = \frac{60}{15} \text{ 이므로 } 60^{1-a-b} = 4 \dots \textcircled{㉠}$$

$$60^b = 5 \text{ 에서 } \frac{60}{60^b} = \frac{60}{5} \text{ 이므로 } 60^{1-b} = 12 \dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \text{ 에서 } 12 = 60^{1-b}, 12^{\frac{1}{1-b}} = 60, (12^{\frac{1}{1-b}})^{1-a-b} = 60^{1-a-b}$$

$$\textcircled{㉠} \text{ 에 의해 } 12^{\frac{1-a-b}{1-b}} = 4, (12^{\frac{1-a-b}{1-b}})^{\frac{1}{2}} = 12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}} = 4^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore 12^{\frac{(1-a-b)}{2(1-b)}} = 2$$

37. 어떤 도형이 그려진 종이를 복사기로 확대 복사를 한 후 출력된 복사본으로 같은 배율의 확대 복사본을 또 만든다. 이와 같은 작업을 계속해 나갔더니 5회째 복사본에서 도형의 넓이는 처음 도형의 넓이의 2배가 되었다. 7회째 복사본에서 도형의 넓이는 4회째 복사본에서 도형의 넓이의 몇 배인가?

① $\sqrt[5]{8}$

② $\sqrt[5]{8}$

③ $\sqrt[3]{8}$

④ $\sqrt[5]{4}$

⑤ $\sqrt[3]{4}$

해설

처음 도형의 넓이를 A , 확대 배율을 a 로 놓으면 5회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^5$ 이므로

$$A \cdot a^5 = 2A \text{에서 } a^5 = 2 \quad \therefore a = \sqrt[5]{2}$$

7회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^7$

4회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^4$ 이므로

$$\frac{A \cdot a^7}{A \cdot a^4} = a^3 = (\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{8}$$

38. 지진이 발생할 때, 지진의 세기를 진도라 하며 보통 리히터수로 나타낸다. 지질학자 C.F.Richer는 강도가 I 인 지진의 진도 R 을 다음과 같이 정의하였다.

$$R = \log \frac{I}{I_0} \text{ (단, } I_0 \text{ 는 표준지진의 강도)}$$

리히터수로 진도 6.8인 지진의 강도는 리히터 수로 진도 4.8인 지진의 강도의 몇배인가?

- ① 1.4 배 ② 2 배 ③ $\sqrt{10}$ 배
④ 10 배 ⑤ 100 배

해설

진도가 4.8, 6.8 일 때의 지진의 강도를 각각 I_1 , I_2 라 하면

$$4.8 = \log \frac{I_1}{I_0}, \quad 6.8 = \log \frac{I_2}{I_0} \text{ 이므로}$$

$$\therefore \log \frac{I_2}{I_1} = \frac{10^{6.8}}{10^{4.8}} = 100(\text{배})$$

39. 어떤 복사기로 확대 복사를 한 후 출력된 복사본으로 같은 배율의 확대 복사본을 또 만든다. 이와 같은 작업을 계속해 나갔더니 5회째 복사본에서 도형의 넓이는 처음 도형의 넓이의 2배가 되었다. 7회째 복사본에서 도형의 넓이는 4회째 복사본에서 도형의 넓이의 몇 배인가?

① $\sqrt[5]{8}$

② $\sqrt[5]{8}$

③ $\sqrt[3]{8}$

④ $\sqrt[5]{4}$

⑤ $\sqrt[3]{4}$

해설

처음 도형의 넓이를 A , 확대 배율을 a 라 놓으면 5회째 복사본에서 도형의 넓이는

$$A \cdot a^5 \text{ 이므로 } A \cdot a^5 = 2A \text{ 에서 } a^5 = 2$$

$$\therefore a = \sqrt[5]{2}$$

7회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^7$,

4회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^4$ 이므로

$$\frac{A \cdot a^7}{A \cdot a^4} = a^3 = (\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{8}$$