1. 다음 함수 중 좌표평면에서 그 그래프가 임의의 직선과 항상 만나는 것은 무엇인가?

① $y = |x|$ ② $y = x^2$ ③ $y = \sqrt{x}$

④ $y = x^3$ ⑤ $y = \dfrac{1}{x}$

해설

각 함수의 그래프를 그려보거나,
정의역, 치역 관계를 조사해 보면 쉽게 알 수 있다.
x, y 전체 실수 구간에서 그래프가
그려지는 함수는 $y = x^3$ 뿐이다.

2. $x^2 \neq 4$인 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{x+6}{x^2-4} = \dfrac{a}{x+2} - \dfrac{b}{x-2}$을 만족시키는 상수 a와 b가 있다. 이때, $a+b$의 값은?

① -6 ② -3 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\dfrac{x+6}{x^2-4} = \dfrac{a}{x+2} - \dfrac{b}{x-2}$의 우변을 통분하여 계산하면

$$\frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4}$$
$$= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4}$$

따라서 $a - b = 1,\ -2(a+b) = 6$

$\therefore\ a = -1,\ b = -2$

$\therefore\ a + b = -1 - 2 = -3$

3. $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$ 을 간단히 하면?

① $\dfrac{2}{x(x+2)}$ ② $\dfrac{3}{x(x+2)}$

③ $\dfrac{2}{(x+2)(x+3)}$ ④ $\dfrac{3}{(x+2)(x+3)}$

⑤ $\dfrac{3}{x(x+3)}$

해설

$$(\text{준식})=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{3}{x(x+3)}$$

4. $x^2 - 3x + 1 = 0$ 에서 $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$x - 3 + \dfrac{1}{x} = 0,\ x + \dfrac{1}{x} = 3$

$\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$

5. $(x+y):(y+z):(z+x)=6:7:5$일 때, $\dfrac{x^2-yz}{x^2+y^2}$의 값을 구하면?

① $-\dfrac{2}{5}$ ② $-\dfrac{4}{13}$ ③ $\dfrac{2}{5}$ ④ $\dfrac{4}{13}$ ⑤ $\dfrac{4}{5}$

해설

$$\begin{cases} x+y=6k \cdots ㉠ \\ y+z=7k \cdots ㉡ \\ z+x=5k \cdots ㉢ \end{cases} \quad (\text{단, } k\neq 0)$$

㉠ + ㉡ + ㉢를 해 주면 $2(x+y+z)=18k$

$\therefore\ x+y+z=9k$

$\therefore\ x=2k,\ y=4k,\ z=3k$

$$\therefore\ \frac{x^2-yz}{x^2+y^2}=\frac{4k^2-12k^2}{4k^2+16k^2}=\frac{-8}{20}=-\frac{2}{5}$$

6. $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}(\neq 0)$ 일 때, $\frac{3a-b-c}{3a+b+c}=-\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하여라.(단, p, q는 서로 소인 양의 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k(k\neq 0)$로 놓으면

$a=2k,\ b=3k,\ c=4k$

$\therefore \frac{3a-b-c}{3a+b+c}=\frac{6k-3k-4k}{6k+3k+4k}=\frac{-k}{13k}=-\frac{1}{13}$

$\therefore p=13, q=1 \quad p+q=14$

7. 제2항이 6, 제5항이 162인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은? (단, 공비는 실수)

① 3^9 ② $2 \cdot 3^9$ ③ 3^{10}

④ $2 \cdot 3^{10}$ ⑤ 3^{11}

해설

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2 = ar = 6$ ······㉠

$a_5 = ar^4 = 162$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = 2,\ r = 3$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 3이므로 일반항 a_n은

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore a_{10} = 2 \cdot 3^9$

8. $4^3+5^3+6^3+\cdots+10^3$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2989

해설

$4^3+5^3+6^3+\cdots+10^3=\sum_{k=1}^{10}k^3-\sum_{k=1}^{3}k^3$

$=\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2-\left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2$

$=3025-36=2989$

9. 두 함수 $f(x)=3x-1,\ g(x)=4-3x$ 에 대하여 $h\circ f=g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$는?

① $h(x)=\frac{1}{3}(x+1)$
② $h(x)=3x-1$
③ $h(x)=x-3$
④ $h(x)=3-x$
⑤ $h(x)=x+3$

해설

$(h\circ f)(x)=4-3x$에서

$f(x)=t$라 하면 $t=3x-1,\ 3x=t+1$

$x=\frac{1}{3}(t+1)$ 을 대입하면

$h(t)=4-3\times\frac{1}{3}(t+1)=3-t$

$\therefore\ h(x)=3-x$

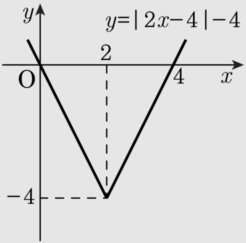
10. 함수 $y=|2x-4|-4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y=|2x-4|-4=|2(x-2)|-4$ 의 그래프는
$y=|2x|$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로
다음 그림과 같다.



따라서 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times4=8$

11. $a+\frac{1}{b}=c,\ b+\frac{1}{c}=d,\ c+\frac{1}{d}=a$일 때, ab의 값은 ?

① $-\frac{3}{2}$　② -1　③ $-\frac{1}{2}$　④ 0　⑤ 1

해설

$c=a+\frac{1}{b}$ 을 $b+\frac{1}{c}=d$에 대입하면

$$d=b+\frac{1}{a+\frac{1}{b}}=b+\frac{b}{ab+1}=\frac{ab^2+2b}{ab+1}$$

c와 d를 $a=c+\frac{1}{d}$에 대입하면

$a=a+\frac{1}{b}+\frac{ab+1}{ab^2+2b}$ 에서 $\frac{ab+2+ab+1}{ab^2+2b}=0$

$$\therefore\ \frac{2ab+3}{ab^2+2b}=0$$

따라서 $2ab+3=0$ 이므로 $ab=-\frac{3}{2}$

12. 함수 $y=\dfrac{ax+1}{-x+b}$ 의 그래프의 점근선이 $x=2, y=-1$ 일 때, 상수 $a+b$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$y=\dfrac{ax+1}{-(x-b)}$ 의 점근선이 $x=2, y=-1$ 이므로

$b=2$ 이고

$y=\dfrac{a(x-2)+2a+1}{-(x-2)}=\dfrac{2a+1}{-(x-2)}-a$ 에서

$-a=-1$ 이므로

$\therefore a+b=1+2=3$

13. 함수 $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 점 $(1,\ 0)$ 을 지나고, 점근선의 방정식이 $x = 2$, $y = 1$ 일 때, abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

점근선이 $x = 2,\ y = 1$ 이므로

$y = \dfrac{k}{x-2} + 1 \cdots ①$

①이 $(1,\ 0)$ 을 지나므로

$0 = -k + 1 \therefore\ k = 1$

$y = \dfrac{1+x-2}{x-2} = \dfrac{x-1}{x-2}$

$\therefore\ a = 1,\ b = -1,\ c = -2$

따라서 $abc = 2$

14. 다음 수열 $\{a_n\}$의 제 50항의 값은?

$2, 7, 12, 17, 22 \cdots$

① 227 ② 237 ③ 247 ④ 257 ⑤ 267

해설

주어진 수열은 첫째항이 2이고, 공차가 5인 등차수열이므로 $a_n = 5n - 3$

$\therefore a_{50} = 5 \cdot 50 - 3 = 247$

15. 첫째항이 -10 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 7 항까지의 합과 제 7 항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10 항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 80

해설

$S_7 = a_7$

$$S_7 = \frac{7(2a+6d)}{2}$$

$a_7 = a + 6d$

$$\frac{7(2a+6d)}{2} = a + 6d$$

$7a + 21d = a + 6d$

$6a = -15d$

$$d = \frac{6 \times (-10)}{-15} = 4$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2}$$

$$= \frac{10(-20+36)}{2}$$

$$= \frac{160}{2} = 80$$

16. 어떤 등차수열의 첫째항부터 10까지의 합이 100이고, 11항부터 20항까지의 합이 300일 때 21항부터 30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 500

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = 100$$

$$2a+9d = 20$$

$$S_{20} - S_{10} = \frac{20(2a+19d)}{2} - 100 = 300$$

$$10(2a+19d) = 400$$

$$2a+19d = 40$$

$$2a+9d+10d = 40$$

$$20+10d = 40$$

$$d = 2$$

$$\therefore 2a = 2,\ a = 1$$

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{20} &= \frac{30(2a+29d)}{2} - (100+300) \\ &= \frac{30(2+29\times 2)}{2} - 400 \\ &= 15\times 60 - 400 \\ &= 500 \end{aligned}$$

17. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의될 때, a_{10}의 값은?

$$a_1 = 4,\ a_2 = 6,\ a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2} (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

① $4\left(\frac{3}{2}\right)^8$ ② $4\left(\frac{3}{2}\right)^9$ ③ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$
④ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{11}$ ⑤ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$

해설

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$에서 $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때, $a_1 = 4$이고 공비 r은 $r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{3}{2}$이므로

$$a_n = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_{10} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^9$$

18. 임의의 정수 k에 대하여 $f(k) = 2k - 1$이라 하고, 연산 ◇를 $f(m) \diamond f(n) = f(2m + n)$로 정의한다. 이 때, $-3 \diamond 5$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

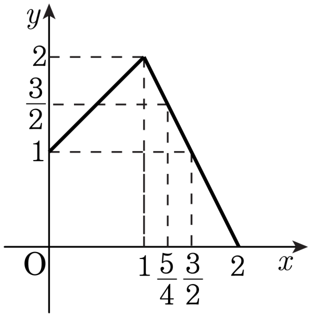
$f(m) = -3,\ f(n) = 5$라 하면

$2m - 1 = -3,\ 2n - 1 = 5$

$\therefore\ m = -1,\ m = 3$

$\therefore -3 \diamond 5 = f(-1) \diamond f(3) = f(-2 + 3) = f(1) = 1$

19. $0 \le x \le 2$ 에서 함수 $y = f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $f^{2008}\left(\frac{5}{4}\right)$ 의 값은?(단, $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f^2(x))$ $\cdots$ $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, n은 자연수)



① 0 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ 2

해설

함수 $y = f(x)$ 의 그래프에서

$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{2}$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$, $f(1) = 2$

$f(2) = 0$, $f(0) = 1$ 이므로

$f^2\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$

$f^3\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^2\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(1) = 2$

$f^4\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^3\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(2) = 0$

$f^5\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^4\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(0) = 1$

$f^6\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^5\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(1) = 2 \cdots$

따라서, $f^n\left(\frac{5}{4}\right)$ 은

$\frac{3}{2}$, 1, 2, ,0, 1, 2, 0, $\cdots$ 와 같이 $n \ge 2$ 일 때, 1, 2, 0 의 값이 반복되므로

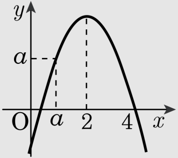
$\therefore\ f^{2008}\left(\frac{5}{4}\right) = f^{3\times 668+4}\left(\frac{5}{4}\right) = f^4\left(\frac{5}{4}\right) = 0$

20. 집합 $X = \{x \mid x \le a,\ x$는 실수$\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x^2 + 4x$ 의 역함수가 존재할 때, a 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$f(x) = -(x-2)^2 + 4$ 의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

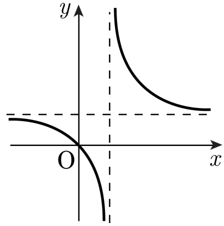


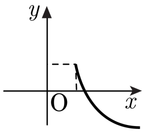
정의역, 공역은 모두 a 이하이고 $a \le 2$, $f(a) = a$

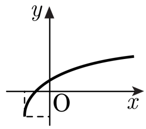
$-a^2 + 4a = a \quad \therefore\ a = 0,\ 3$

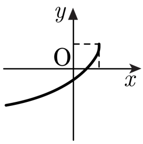
a 는 2보다 작아야 하므로 구하는 값은 0

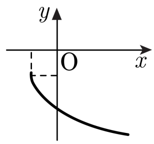
21. 다음 그림은 분수함수 $y = \dfrac{b}{x+a} + c$ 의 그래프의 개형이다. 다음 중 무리함수 $y = a - \sqrt{bx+c}$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

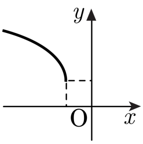


①


②


③


④


⑤


해설

점근선이 $x =$ 양수, $y =$ 양수 이므로

$y = \dfrac{b}{x+a} + c$에서 $a < 0,\ c > 0$

그리고 원점을 지나므로

$\dfrac{b}{a} + c = 0,\ b = -ac > 0$

$\therefore\ y = -\sqrt{bx+c} + a$

꼭짓점 $\left(-\dfrac{c}{b},\ a\right),\ \left(-\dfrac{c}{b} < 0, a < 0\right)$

루트 앞의 부호가 음수이므로 그래프의 개형은 ④이다.

22. 수열 a_n을 다음과 같이 정의한다.

$a_n = 10^{n-1} + 10^{-n}$(단, $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$)

$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 라고 할 때,

$\sum_{k=1}^{10} b_k = \dfrac{1}{㉠}\{10^{㉡} + 10^{㉢} + ㉣\}$ 이다.

이때, ㉠+ ㉡+ ㉢+ ㉣의 값은?

① 29　② 69　③ 71　④ 93　⑤ 111

해설

$b_n = \sum_{k=1}^{n}(10^{k-1} + 10^{-k})$

$= \dfrac{10^n - 1}{10 - 1} + \dfrac{\frac{1}{10}\left\{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{10}}$

$= \dfrac{1}{9}\left\{10^n - \left(\dfrac{1}{10}\right)^n\right\}$

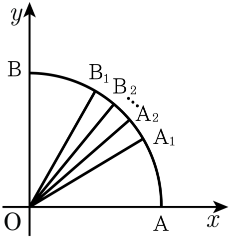
즉, $b_n = \dfrac{10^n - 10^{-n}}{9}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{10} b_k = \dfrac{1}{9}\sum_{k=1}^{10}(10^k - 10^{-k})$

$= \dfrac{1}{9}\left\{\dfrac{10(10^{10} - 1)}{10 - 1} - \dfrac{\frac{1}{10}(1 - 10^{-10})}{1 - \frac{1}{10}}\right\} = \dfrac{1}{81}(10^{11} + 10^{-10} - 11)$

$\therefore$ ㉠ + ㉡ + ㉢ + ㉣ $= 81 + 11 - 10 - 11 = 71$

23. 그림과 같이 사분원 AOB에 대하여 $\angle$AOB를 삼등분하는 직선이 사분원과 만나는 교점을 각각 A_1, B_1이라 하고, $\angle A_1OB_1$을 삼등분하는 직선이 사분원과 만나는 교점을 각각 A_2, B_2라고 하자. 이와 같은 방법으로 계속할 때, $\angle A_{10}OB$의 크기는?



① $\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{3^9}\right)$ ② $\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{3^9}\right)$ ③ $\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)$
④ $\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{3^{10}}\right)$ ⑤ $\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{3^{11}}\right)$

해설

$$\angle A_{10}OB=\frac{\pi}{2}-\angle A_{10}OA$$

$$\angle A_{10}OA=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{\pi}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\frac{\pi}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^9$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)$$

$$\therefore\ \angle A_{10}OB=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)$$

$$\therefore\ \angle A_{10}OB=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)=\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{3^{10}}\right)$$

24. x에 대한 이차방정식 $\sum_{k=1}^{10} x^2 - \sum_{k=1}^{10} \dfrac{x}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{10} k = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값은?

① $\alpha+\beta = \dfrac{1}{11},\ \alpha\beta = -\dfrac{11}{2}$

② $\alpha+\beta = \dfrac{10}{11},\ \alpha\beta = -\dfrac{11}{2}$

③ $\alpha+\beta = \dfrac{10}{11},\ \alpha\beta = -\dfrac{2}{11}$

④ $\alpha+\beta = 11,\ \alpha\beta = -\dfrac{11}{2}$

⑤ $\alpha+\beta = 11,\ \alpha\beta = -22$

해설

$\sum_{k=1}^{10} x^2 = 10x^2$ 이고,

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{x}{k(k+1)} = x\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= x\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$= x\left(1 - \frac{1}{11}\right) = \frac{10}{11}x$$

또, $\sum_{k=1}^{10} k = \dfrac{10 \cdot 11}{2} = 55$ 이므로 주어진 이차방정식은 $10x^2 - \dfrac{10}{11}x - 55 = 0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta = -\frac{-\frac{10}{11}}{10} = \frac{1}{11}$$

$$\alpha\beta = \frac{-55}{10} = -\frac{11}{2}$$

25. $a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + \alpha}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수일 때, a_{15}의 값은?(단, α는 0이 아닌 상수)

① 10　　② 6　　③ 4　　④ 2　　⑤ 1

해설

$a_1 = a_2 = 1$

$$a_3 = \frac{1+\alpha}{1} = 1+\alpha$$

$$a_4 = \frac{(1+\alpha)+\alpha}{1} = 1+2\alpha$$

$$a_5 = \frac{(1+2\alpha)+\alpha}{1+\alpha} = \frac{1+3\alpha}{1+\alpha}$$

$\cdots$

$a_3,\ a_4$가 자연수이므로 α는 자연수이다.

$a_5 = \beta$라 하면 $\beta = \dfrac{1+3\alpha}{1+\alpha}$이고, $\alpha,\ \beta$는 자연수이다.

$\beta + \alpha\beta = 1 + 3\alpha$에서 $(\alpha+1)(\beta-3) = -2$

$\alpha + 1 > 1$이므로 $\alpha + 1 = 2,\ \beta - 3 = -1$

$\therefore\ \alpha = 1,\ \beta = 2$

이때, $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 3,\ a_5 = 2$이고

$$a_6 = \frac{2+1}{3} = 1 = a_1,\ a_7 = \frac{1+1}{2} = 1 = a_2$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 2$가 반복되는 수열이다.

$\therefore\ a_{15} = a_5 = 2$