1. 첫째항이 3, 공비가 3 인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $a_n = 3^n$

해설

$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

2. 첫째항이 1, 공비가 -3 인 항수가 5 인 등비수열의 합은?

① 61 ② 122 ③ 244 ④ 361 ⑤ 722

해설

$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ 에서

$$S_5 = \frac{1 \cdot \{1-(-3)^5\}}{1-(-3)} = 61$$

3. $\sum_{k=1}^{10} k^3$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3025

해설

$$\sum_{k=1}^{10} k^3 = \frac{10 \cdot 11}{2} \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 3025$$

4. 16의 네제곱근 중 실수인 것을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-2,\ 2$

해설

16의 네제곱근은

$x^4=16$를 만족하는 x의 값이므로

$x^4-16=0$에서

$(x^2-4)(x^2+4)=0$

$(x-2)(x+2)(x^2+4)=0$

$\therefore x=-2,\ 2,\ 2i,\ -2i$

따라서 16의 네제곱근 중 실수인 것은

$-2,\ 2$

5. $\sqrt[3]{2^7} \div \sqrt[3]{2} \times \sqrt{2^5}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt{2}$　② 2　③ $4\sqrt{2}$　④ 8　⑤ $16\sqrt{2}$

해설

$2^{\frac{7}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{5}{2}}$

$= 2^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}} = 2^{\frac{9}{2}} = 16\sqrt{2}$

6. $3^x = 2$ 일 때, $(\frac{1}{9})^{-x}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$(\frac{1}{9})^{-x} = (3^{-2})^{-x} = 3^{2x} = (3^x)^2 = 4$$

7. $\log_9 x = -\dfrac{3}{2}$ 을 만족하는 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1}{27}$

해설

$\log_9 x = -\dfrac{3}{2}$

$\Longleftrightarrow \ x = 9^{-\frac{3}{2}} = (3^2)^{-\frac{3}{2}} = 3^{-3} = \dfrac{1}{27}$

8. $\log_2 5\sqrt{3} + \log_2 \frac{24}{5} - \log_2 3\sqrt{3}$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 5 ④ $\log_2 5$ ⑤ $\log_2 6$

해설

$$\log_2 5\sqrt{3} + \log_2 \frac{24}{5} - \log_2 3\sqrt{3} = \log_2 \frac{5\sqrt{3} \times \frac{24}{5}}{3\sqrt{3}}$$

$$= \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

9. 수열 $1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ \cdots$ 의 11 번째 항은?

① -13 ② -10 ③ 11 ④ -11 ⑤ 13

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 자연수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다. 따라서 11 번째 항은 11 이다.

10. 조화수열 12, 6, 4, 3, $\cdots$ 의 일반항은?

① $\dfrac{12}{n}$ ② $\dfrac{8}{n}$ ③ $\dfrac{6}{n}$ ④ $\dfrac{3}{n}$ ⑤ $\dfrac{2}{n}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$이라고 하면,

$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이다.

$$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \cdots$$

$$= \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \cdots$$

따라서 등차수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$의 일반항은 $\dfrac{n}{12}$

$$\therefore\ a_n = \frac{12}{n}$$

11. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385 ② 550 ③ 1100 ④ 1150 ⑤ 1200

해설

$$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$$
$$=\sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\frac{j(j+1)}{2}\right\}$$
$$=\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{j^2+7j}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10} j^2+7\cdot\sum_{j=1}^{10} j\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 12}{6}+7\times\frac{10\cdot 11}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(385+385)$$
$$=385$$

12. 다음 식의 값은?

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

① 9　② $3\sqrt{11}-\sqrt{2}$　③ $\sqrt{99}-1$
④ $\sqrt{101}-1$　⑤ 11

해설

$$(\text{준식})=\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$
$$=\sqrt{100}-1=9$$

13. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{n+1}$　② $\dfrac{2n}{n+1}$　③ $\dfrac{n}{2n+1}$
④ $\dfrac{n}{n+2}$　⑤ $\dfrac{2n}{2n+1}$

해설

준 식) $= \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)\right\}+\cdots+$

$\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$= \dfrac{n}{2n+1}$

14. $x=\dfrac{\log_a(\log_a b)}{\log_a b}$ 일 때, 다음 중 b^x과 같은 것은?

① a ② b ③ a^b ④ b^2 ⑤ $\log_a b$

해설

주어진 식을 밑 변환의 공식에 의해 변형하면

$$x=\dfrac{\dfrac{\log_b(\log_a b)}{\log_b a}}{\dfrac{\log_b b}{\log_b a}}=\log_b(\log_a b)$$

로그의 정의에 의해 $b^x=\log_a b$

15. $\log_3 2 = a$일 때, $\log_{\sqrt{12}} 9$를 a로 나타내면?

① $\dfrac{2}{2a+1}$ ② $\dfrac{4}{2a+1}$ ③ $\dfrac{2}{a+1}$

④ $\dfrac{2}{a+2}$ ⑤ $\dfrac{4}{a+2}$

해설

$$\log_{\sqrt{12}} 9$$

$$= \frac{\log_3 9}{\log_3 \sqrt{12}} = \frac{2}{\frac{1}{2}\log_3(2^2 \cdot 3)}$$

$$= \frac{4}{2(\log_3 2 + 1)} = \frac{4}{2(a+1)} = \frac{2}{a+1}$$

16. $\frac{1}{2}\log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt{7} = a$, $\log_3 4 \cdot \log_4 \sqrt{3} = b$일 때, $a + 2b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$a = \log_3 \frac{3}{\sqrt{7}} + \log_3 \sqrt{7} = \log_3 3 = 1$$

$$b = \log_3 4 \cdot \log_4 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 1 + 1 = 2$$

17. $\log 80$ 의 정수 부분을 n, 소수 부분을 a 라 할 때, $10^n + 10^a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$\log 80 = \log(10 \times 8) = 1 + \log 8$ 에서

$0 < \log 8 < 1$ 이므로

$\log 80$ 의 정수 부분은 1 이고 소수 부분은 $\log 8$ 이다.

즉 $n = 1, a = \log 8$ 이므로

$10^n + 10^a = 10 + 10^{\log 8} = 10 + 8 = 18$

18. 첫째항이 -10인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 7항까지의 합과 제 7항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 80

해설

$$S_7 = a_7$$

$$S_7 = \frac{7(2a+6d)}{2}$$

$$a_7 = a + 6d$$

$$\frac{7(2a+6d)}{2} = a + 6d$$

$$7a + 21d = a + 6d$$

$$6a = -15d$$

$$d = \frac{6 \times (-10)}{-15} = 4$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = \frac{10(-20+36)}{2} = \frac{160}{2} = 80$$

19. 두 수열

$\{a_n\} = 6,\ a_2,\ a_3,\ 48, \cdots$

$\{b_n\} = 6,\ b_2,\ b_3,\ 48, \cdots$ 에 대하여

$\{a_n\}$은 등비수열, $\{b_n\}$은 등차수열일 때, $a_{10} - 10b_{10}$ 의 값은?(단, 공비는 실수이다.)

① 1752 ② 1843 ③ 1950 ④ 2250 ⑤ 2356

해설

수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $a_4 = 48$이므로

$6r^3 = 48,\ r^3 = 8 \quad \therefore\ r = 2(\because\ r$은 실수 $)$

$a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$

수열 $\{b_n\}$의 공차를 d라 하면 $b_4 = 48$이므로

$6 + 3d = 48,\ 3d = 42 \quad \therefore\ d = 14$

$b_n = 6 + (n-1) \cdot 14 = 14n - 8$

$\therefore\ a_{10} - 10b_{10} = 6 \times 2^9 - 10(14 \cdot 10 - 8)$

$= 3072 - 1320 = 1752$

20. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의될 때, a_{10}의 값은?

$$a_1 = 4,\ a_2 = 6,\ a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2} (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

① $4\left(\frac{3}{2}\right)^8$ ② $4\left(\frac{3}{2}\right)^9$ ③ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$
④ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{11}$ ⑤ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$

해설

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$에서 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때, $a_1 = 4$이고 공비 r은 $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{2}$이므로

$$a_n = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_{10} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^9$$

21. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2,\ a_n + a_{n+1} = 3n\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$으로 정의된다. 이때, 두 수 $P = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{19},\ Q = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \cdots + a_{20}$에 대하여 $P - Q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$n = 1$일 때, $a_1 = 2,\ a_1 + a_2 = 3\ \ \therefore a_2 = 1$

$n = 2$일 때, $a_2 + a_3 = 6\ \ \therefore a_3 = 5$

$n = 3$일 때, $a_3 + a_4 = 9\ \ \therefore a_4 = 4$

$\therefore a_{2n-1} - a_{2n} = 1(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$

$\therefore P - Q = \sum_{k=1}^{10}(a_{2n-1} - a_{2n}) = 10$

22. $a = \sqrt{2},\ b = \sqrt[3]{3}$ 일 때, $\sqrt[6]{6}$을 a, b로 나타낸 것은?

① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ ② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ ③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$ ④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}}$

해설

$a = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}},\ b = \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$ 이므로

$\sqrt[6]{6} = 6^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} \cdot (3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$

23. 등비수열 $\{a_n\}$에서
$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 36$,
$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{2n} = 18$일 때,
$a_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} + \cdots + a_{3n}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = 36 \cdots ㉠$$

$S_{2n} - S_n = 18$에서 $S_{2n} = S_n + 18 = 36 + 18 = 54$

$$S_{2n} = \frac{a(1-r^{2n})}{1-r} = \frac{a(1-r^n)(1+r^n)}{1-r} = 36 \cdot (1+r^n) = 54$$

$$1 + r^n = \frac{3}{2} \quad \therefore\ r^n = \frac{1}{2}$$

$$S_{3n} = \frac{a(1-r^{3n})}{1-r} = \frac{a(1-r^n)(1+r^n+r^{2n})}{1-r}$$

$$= 36\left\{1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} = 63$$

이때, $a_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} + \cdots + a_{3n} = S_{3n} - S_n$이므로
$63 - 54 = 9$

24. 매년 말에 6만원씩 적립할 때, 10년 후의 원리합계는?
(단, 연이율은 6푼, 1년마다의 복리로 계산하고, $1.06^{10} \fallingdotseq 1.791$)

① 791000원 ② 792000원 ③ 793000원

④ 794000원 ⑤ 795000원

해설

$$S_n = \frac{60000\left\{(1.06)^{10} - 1\right\}}{0.06} = \frac{60000 \times 0.791}{0.06}$$
$$= 791000(\text{원})$$

25. 다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

I. $a_1 = 3$ II. a_{n+1}은 ${a_n}^2$을 7로 나눈 나머지이다.

이 수열에서 $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$의 값은?

① 20 ② 24 ③ 35 ④ 40 ⑤ 42

해설

$a_1 = 3$
$a_2 = 2$
$a_3 = 4$
$a_4 = 2$
$\vdots$

즉, $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{2n} = 2 \\ a_{2n+1} = 4 \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = \sum_{k=1}^{10} 2 = 20$