1. 유리식 $\dfrac{(x-1)(x+2)(x+4)}{x^3+3x^2-4}$ 를 간단히 하면?

① $\dfrac{x+2}{x-1}$ ② $\dfrac{x+1}{x+2}$ ③ $\dfrac{x+4}{x+2}$ ④ $\dfrac{x+1}{x-2}$ ⑤ $\dfrac{x+4}{x-2}$

해설

$$\frac{(x-1)(x+2)(x+4)}{x^3+3x^2-4} = \frac{(x-1)(x+2)(x+4)}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{x+4}{x+2}$$

2. 유리식 $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$ 을 간단히 하면? (단, $a \neq b$)

① $\dfrac{a+b}{a-b}$ ② $\dfrac{a-b}{a+b}$ ③ $\dfrac{a}{a+b}$ ④ $\dfrac{a}{a-b}$ ⑤ 1

해설

$$\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2} = \frac{a+b}{a-b}$$

3. $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-12} \times \dfrac{4x^2+16x}{x+1} \div \dfrac{2x-4}{x-3}$ 을 간단히 하면?

① x　　② $2x$　　③ $x-2$

④ $2x-6$　　⑤ $x+4$

해설

식을 인수분해 한 후 약분하여 정리한다.

$\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-12} \times \dfrac{4x^2+16x}{x+1} \div \dfrac{2x-4}{x-3}$

$= \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x+4)(x-3)} \times \dfrac{4x(x+4)}{(x+1)} \times \dfrac{(x-3)}{2(x-2)} = 2x$

4. 유리식 $\dfrac{a+b}{ac-bc} \div \dfrac{ab+b^2}{a^2-ab}$ 을 간단히 하면?

① $\dfrac{a}{b}$ ② $\dfrac{b}{ac}$ ③ $\dfrac{c}{ab}$ ④ $\dfrac{a}{bc}$ ⑤ $\dfrac{a}{c}$

해설

$$\frac{a+b}{ac-bc} \div \frac{ab+b^2}{a^2-ab} = \frac{a+b}{(a-b)c} \times \frac{a(a-b)}{b(a+b)} = \frac{a}{bc}$$

5. $x^2 \neq 4$인 모든 실수 x에 대하여 $\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$을 만족시키는 상수 a와 b가 있다. 이때, $a+b$의 값은?

① -6 ② -3 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$의 우변을 통분하여 계산하면

$$\frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4}$$
$$= \frac{(a-b)x-2(a+b)}{x^2-4}$$

따라서 $a-b=1,\ -2(a+b)=6$

$\therefore\ a=-1,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=-1-2=-3$

6. $x^2 \neq 4$인 모든 실수 x에 대하여 $\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$을 만족시키는 상수 a와 b가 있다. 이때, $a+b$의 값은?

① -6　　② -3　　③ -1　　④ 2　　⑤ 4

해설

$\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$의 우변을 통분하여 계산하면

$$\frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4} = \frac{(a-b)x-2(a+b)}{x^2-4}$$

따라서 $a-b=1,\ -2(a+b)=6$이므로 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=-3$

7. 등식 $\dfrac{3x}{x^3+1} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ 가 x에 대한 항등식이 되도록 상수 $a,\ b,\ c$의 값을 정할 때, $a+b+c$의 값은?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

$$(\text{우변}) = \frac{a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$= \frac{(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c}{x^3+1}$$

주어진 등식이 x에 대한 항등식이 되려면

$a+b=0,\ -a+b+c=3,\ a+c=0$

이것을 풀면

$a=-1,\ b=1,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=1$

8. 다음 무리식의 값이 실수가 되는 x 의 범위를 구하면?

$\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$

① $1 < x < 3$
② $1 \le x \le 3$
③ $x > 3$
④ $x < 1$
⑤ $x \le 1$ 또는 $x \ge 3$

해설

$x-1 \ge 0,\ x \ge 1 \cdots$ ㉠
$3-x \ge 0,\ x \le 3 \cdots$ ㉡
$\therefore$ ㉠, ㉡을 모두 만족하는 범위는 $1 \le x \le 3$

9. 다음 무리식의 값이 실수가 되도록 x의 범위를 정하면?

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}$$

① $-2 \le x \le 1$　② $0 \le x \le 1$　③ $1 < x < 2$
④ $-1 \le x \le 2$　⑤ $1 \le x \le 2$

해설

$x+1 \ge 0 \quad \therefore x \ge -1$
$2-x \ge 0 \quad \therefore x \le 2$
$x-1 \ge 0 \quad \therefore x \ge 1$
공통부분을 구하면 $1 \le x \le 2$

10. 무리식 $\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ 의 값이 실수가 되도록 x의 범위를 정할 때, 정수 x의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

$2-x \geq 0,\ x+3>0$

$\therefore -3<x\leq 2$ 이므로 정수의 개수는 5 개

11. 함수 $y=\dfrac{2}{x+3}-4$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=a,\ y=b$일 때, $a-b$의 값은?

① -7 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 7

해설

점근선이 $x=-3,\ y=-4$이므로 $a-b=1$

12. 함수 $y=-\frac{2}{x}-3$ 의 점근선의 방정식은?

① $x=0,\ y=3$ ② $x=0,\ y=-3$ ③ $x=1,\ y=3$
④ $x=-1,\ y=3$ ⑤ $x=1,\ y=-3$

해설

$y=-\frac{2}{x}-3$ 는 $y=-\frac{2}{x}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선의 방정식은 $x=0,\ y=-3$ 이다.

13. 함수 $y = \dfrac{k}{x-1} + 3 \ (k \neq 0)$ 의 그래프에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $k > 0$ 이면 제 1 사분면과 제 3 사분면을 지난다.

ㄴ $k < 0$ 이면 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.

ㄷ $k > 3$ 이면 모든 사분면을 지난다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

점근선은 $x = 1, y = 3$ 이다.

ㄱ, ㄷ : $0 < k \leq 3$ 이면, 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.

$k > 3$ 이면 모든 사분면을 지난다.

ㄴ : $k < 0$ 이면, 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.

$\therefore$ ㄴ, ㄷ 이 참.

14. $y = \dfrac{3x-1}{x-1}$ 의 점근선의 방정식은 $x = 1, y = a$ 이다. a 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ −1 ⑤ −2

해설

$y = \dfrac{3(x-1)+2}{x-1} = \dfrac{2}{x-1} + 3$

따라서 점근선의 방정식이 $x = 1, y = 3$ 이므로

$a = 3$

15. 분수함수 $y=\dfrac{bx+3}{x+a}$ 의 점근선이 $x=1,\ y=6$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -5 ② 5 ③ -7 ④ 7 ⑤ $\dfrac{3}{4}$

해설

$y=\dfrac{bx+3}{x+a}$ 의 점근선은 $x=1,\ y=6$ 이므로

$y=\dfrac{6(x-1)+9}{x-1}=\dfrac{9}{x-1}+6$

$\therefore\ a=-1,\ b=6$

$\therefore\ a+b=5$

16. 함수 $y=\dfrac{2+x}{1-2x}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=a, y=b$ 일 때, a 의 값을 구하면?

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

해설

$y=\dfrac{x+2}{-2x+1}$

$=\dfrac{x+2}{-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}$

$=\dfrac{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{5}{2}}{-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}$

$=\dfrac{\dfrac{5}{2}}{-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{1}{2}$

17. 함수 $y=\dfrac{1-2x}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동 시킨 것이다. 여기서 $k+a+b$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$y=\dfrac{-2x+1}{x-2}=\dfrac{-2(x-2)-3}{x-2}=\dfrac{-3}{x-2}-2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=\dfrac{-3}{x}$의

그래프를 x축의 방향으로 2만큼,

y축의 방향으로 -2만큼 평행이동 시킨 것이므로

$k=-3,\ a=2,\ b=-2$

$\therefore\ k+a+b=-3+2-2=-3$

18. 유리함수 $y = \dfrac{ax-b}{x-2}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 $y = \dfrac{3x-1}{x+c}$ 의 그래프와 일치한다. 이때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ 3　　④ 5　　⑤ 8

해설

$y = \dfrac{ax-b}{x-2} \Rightarrow y-2 = \dfrac{a(x+3)-6}{(x+3)-2}$

$\Rightarrow y = \dfrac{ax+3a-b+2(x+1)}{x+1}$

$= \dfrac{(a+2)x+3a-b+2}{x+1}$

$\therefore c=1,\ a=1,\ b=6$

$\Rightarrow a+b+c=8$

19. 함수 $y=\dfrac{x+a}{bx+c}$ 의 그래프를 x축 방향으로 3, y축 방향으로 1만큼 평행이동시켰더니 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그래프와 일치하였다. 이 때, abc 의 값을 구하면?

① 8　② 6　③ 1　④ -6　⑤ -8

해설

$y=\dfrac{x+a}{(bx+c)}$ 의 그래프를 x축 방향으로 3,

y축 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것은 반대로

$y=\dfrac{1}{x}$ 을 x축의 방향으로 -3만큼,

y축의 방향으로 -1만큼 이동시킨것과 같다.

$y=\dfrac{1}{x+3}-1=\dfrac{-x-2}{x+3}=\dfrac{x+2}{-x-3}$

따라서 $a=2, b=-1, c=-3$이므로

$\therefore abc=6$

20. 함수 $f(x)=\dfrac{ax}{2x+3}$ 는 그 정의역과 치역이 같다고 한다. a의 값은? (단, $x \neq -\dfrac{3}{2}$)

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 3

해설

$y=\dfrac{ax}{2x+3}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{-\frac{3}{2}a}{2x+3}$ 이므로 치역은

$y \neq \dfrac{a}{2}$ 인 실수이다.

$\therefore \dfrac{a}{2}=-\dfrac{3}{2}$, 곧 $a=-3$

21. 곡선 $y=\frac{x+3}{x-3}$ 은 곡선 $y=\frac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\frac{3x-1}{x+1}$ 의 점근선은 $x=a$, $y=b$ 이다. $m+n+a+b$ 의 값은?

① 6　② 1　③ 2　④ -2　⑤ -3

해설

$y=\frac{x+3}{x-3}=1+\frac{6}{x-3}$

$y=\frac{6}{x}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 3만큼 , y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=3,\ n=1$

또, $y=\frac{3x-1}{x+1}=-\frac{4}{x+1}+3$ 에서

점근선은 $x=-1,\ y=3$　$a=-1,\ b=3$

따라서 구하는 합은 6

22. 분수함수 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ 가 있다. 이 함수의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이기 위한 필요충분조건은?

① $a-d=0$ ② $a+d=0$ ③ $ad=1$
④ $ad=-1$ ⑤ $ad-bc=0$

해설

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+b) - \frac{ab}{c} + b}{cx+d}$$

$$= \frac{\frac{b}{c}(c-a)}{cx+d} + \frac{a}{c} = \frac{b(c-a)}{c(cx+d)} + \frac{a}{c}$$

주어진 분수함수의 점근선은

$x = -\dfrac{d}{c}$, $y = \dfrac{a}{c}$ 이므로

그래프는 점 $\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$ 에 대하여 대칭이다. 이때, 이 분수함수의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 점 $\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$ 은 직선 $y = x$ 위에 있다.

$\therefore \dfrac{a}{c} = -\dfrac{d}{c},\ a = -d$

$\therefore a+d=0$

23. 함수 $y = \dfrac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 (p, q) 에 대하여 대칭이고, 동시에 $y = x + r$ 에 대하여 대칭이다. 이때, $p + q + r$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$y = \dfrac{2x+3}{x+4} = \dfrac{2(x+4)-5}{x+4} = \dfrac{-5}{x+4} + 2$

따라서 $y = \dfrac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 $(-4, 2)$ 에 대하여 대칭이고,

점 $(-4, 2)$ 를 지나고

기울기가 1 인 직선 $y = x + 6$ 에 대하여 대칭이다.

$\therefore p = -4$, $q = 2$, $r = 6$

$\therefore p + q + r = -4 + 2 + 6 = 4$

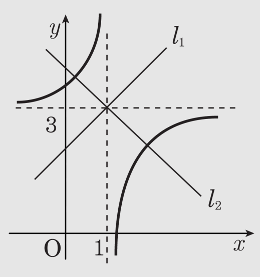
24. 함수 $y = \dfrac{3x-5}{x-1}$ 의 그래프가 직선 $y = ax+b$ 에 대하여 대칭일 때, ab 의 값들을 모두 구하면?

① 2, -4　　② -2, 4　　③ 2, 4
④ -2, -4　　⑤ 3, 5

해설

$y = \dfrac{3x-5}{x-1} = \dfrac{3(x-1)-2}{x-1} = \dfrac{-2}{x-1} + 3$

따라서 위의 그림과 같이 직선 l_1, l_2 에 대하여



대칭이다.

l_1 : $y-3 = 1 \cdot (x-1)$ $\therefore$ $y = x+2$

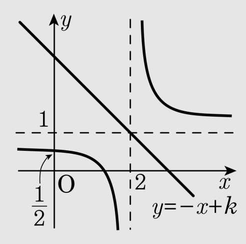
l_2 : $y-3 = -1 \cdot (x-1)$ $\therefore$ $y = -x+4$

따라서 $ab = 2$ 또는 $ab = -4$

25. 분수함수 $y=\dfrac{x-1}{x-2}$의 그래프가 직선 $y=-x+k$에 대하여 대칭일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

① -1　　② 1　　③ 3　　④ 5　　⑤ 7

해설



$y=\dfrac{x-1}{x-2}$

$=\dfrac{(x-2)+1}{x-2}$

$=\dfrac{1}{x-2}+1$

따라서, 점근선이

$x=2,\ y=1$인 분수함수이므로 그래프는

다음과 같다.

다음 그래프가 직선 $y=-x+k$에 대하여

대칭이려면

직선이 두 점근선의 교점인 $(2,\ 1)$을 지나야 하므로

$1=-2+k$

$\therefore\ k=3$

26. $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프는 점 $(2,\ 0)$을 지나고, $x=1,\ y=2$를 점근선으로 할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ -2 ④ $-\dfrac{3}{2}$ ⑤ -3

해설

$x=1,\ y=2$가 점근선이므로

$y=\dfrac{k}{x-1}+2$이다.

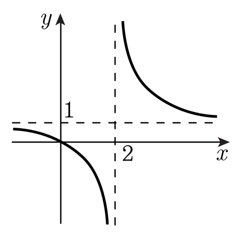
점$(2,\ 0)$을 지나므로 $k=-2$

$\therefore\ y=\dfrac{-2}{x-1}+2=\dfrac{-2+2(x-1)}{x-1}=\dfrac{2x-4}{x-1}$

$\therefore\ a=2,\ b=-4,\ c=-1$

$\therefore\ a+b+c=-3$

27. 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?



① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

해설

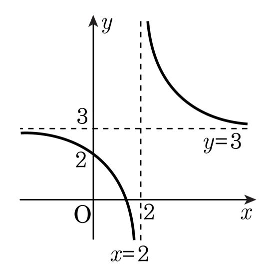
점근선이 $x=2,\ y=1$ 이므로

$y=\dfrac{ax+b}{x+c}=a+\dfrac{b-ac}{x+c}$ 에서 $a=1,\ c=-2$ 이다.

그리고 원점을 지나므로 $b=0$ 이다.

$\therefore\ \ a+b+c=-1$

28. 다음 그림과 같이 주어진 분수함수 $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 점근선이 $x=2$, $y=3$ 일 때, 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?



① -6　　② -4　　③ -3

④ 2　　⑤ 7

해설

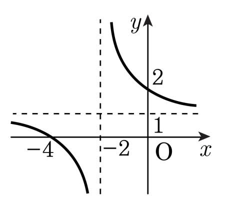
점근선이 $x=2, y=3$ 이므로 $a=3, c=-2$

점$(0,2)$를 지나므로 $\dfrac{b}{c}=2$

$\therefore\ b=-4$

$\therefore a+b+c=-3$

29. 함수 $y = \dfrac{c-x}{ax+b}$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은?



① -1 ② -2 ③ -4

④ -7 ⑤ 0

해설

점근선이 $x=-2,\ y=1$이므로

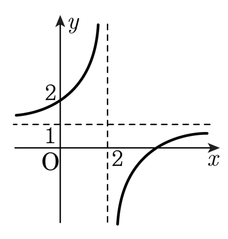
$y = \dfrac{k}{x+2} + 1 \cdots\cdots$ ①

①이 $(0,\ 2)$를 지나므로 대입하면 $k=2$

$y = \dfrac{2}{x+2} + 1 = \dfrac{-x-4}{-x-2}$

$\therefore\ a=-1,\ b=-2,\ c=-4$

30. 함수 $y=\dfrac{a}{x-p}+q$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $a+p+q$ 의 값은?



① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

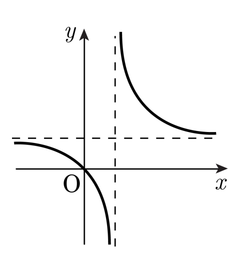
해설

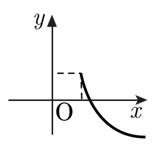
$y=\dfrac{a}{x-2}+1$ 에서 $f(0)=2$ 이므로 $2=\dfrac{a}{-2}+1$

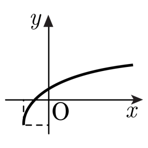
$\therefore\ a=-2$

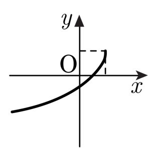
$\therefore\ a+p+q=-2+2+1=1$

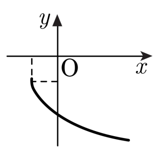
31. 다음 그림은 분수함수 $y = \dfrac{b}{x+a} + c$ 의 그래프의 개형이다. 다음 중 무리함수 $y = a - \sqrt{bx+c}$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

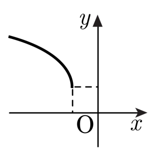


①


②


③


④


⑤


해설

점근선이 $x =$ 양수, $y =$ 양수 이므로

$y = \dfrac{b}{x+a} + c$에서 $a < 0,\ c > 0$

그리고 원점을 지나므로

$\dfrac{b}{a} + c = 0,\ b = -ac > 0$

$\therefore\ y = -\sqrt{bx+c} + a$

꼭짓점 $\left(-\dfrac{c}{b},\ a\right),\ \left(-\dfrac{c}{b} < 0, a < 0\right)$

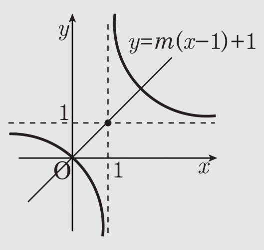
루트 앞의 부호가 음수이므로 그래프의 개형은 ④이다.

32. 두 함수 $y=\dfrac{1}{x-1}+1$, $y=m(x-1)+1$ 의 그래프가 만날 때, 다음 중 m 의 값이 될 수 있는 것을 고르면?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

분수함수 $y=\dfrac{1}{x-1}+1$ 의 그래프는
점근선이 $x=1$, $y=1$ 이고,
점 $(0,\ 0)$ 을 지난다.
$y=m(x-1)+1$ 의 그래프는 점 $(1,\ 1)$ 을
지나는 직선이므로 두 함수가 만나기 위한
실수 m 의 값의 범위는
다음 그림에서 $m>0$ 이다.
따라서, 보기 중 m 의 값이 될 수 있는 것은
⑤이다.



33. 분수함수 $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ 의 그래프가 직선 $y=mx+1$ 과 만나지 않도록 하는 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

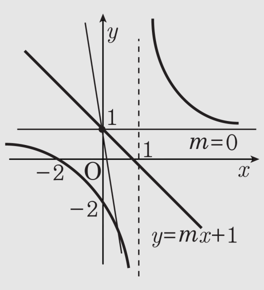
① $0<m\le 12$ ② $-12\le m<0$ ③ $-12<m\le 0$

④ $0\le m<12$ ⑤ $-12\le m\le 12$

해설

$y=\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{x-1+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+1$ 이므로 함수 $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ 의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

(i) 그림에서 $m=0$ 일 때
두 그래프는 만나지 않는다.



(ii) $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ 와 $y=mx+1$ 에서

$\dfrac{x+2}{x-1}=mx+1$

즉, $mx^2-mx-3=0$

이때, 판별식을 D 라 하면

$D=m^2+12m<0,\ m(m+12)<0$

$\therefore\ -12<m<0$

(i), (ii) 에서 구하는 실수 m 의 값의 범위는

$-12<m\le 0$

34. 다음 무리함수 중 함수 $y=\sqrt{-x}$을 평행이동하여 얻을 수 없는 것을 고르면?

① $y=\sqrt{-x+2}$
② $y=\sqrt{-(x+1)}+3$
③ $y=\sqrt{3-x}$
④ $y=\sqrt{x-1}-1$
⑤ $y=\sqrt{-x}-1$

해설

$y=\sqrt{-x}$에서 x 앞의 부호가 반대일 경우 평행이동하여 얻을 수 없다.

35. 다음 중 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프와 겹쳐질 수 없는 것은?

① $y = -\sqrt{1-x}+1$ ② $y = \sqrt{x}-1$

③ $y = \sqrt{x-1}+3$ ④ $y = -\sqrt{-x+2}+2$

⑤ $y = \sqrt{-2x+1}-1$

해설

⑤ $y = \sqrt{ax+b}+c$ 에서 a 의 계수가 다르면
평행이동 또는 대칭이동에 의해 겹쳐지지 않는다.

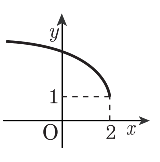
36. 다음 함수의 그래프 중 평행이동하여 함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은?

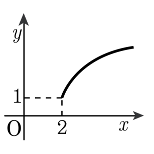
① $y = \sqrt{x}$
② $y = \sqrt{2x+1} - 1$
③ $y = \sqrt{-2x-1} - 1$
④ $y = -\sqrt{2x} + 1$
⑤ $y = -\sqrt{-2x}$

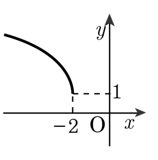
해설

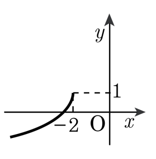
$y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를
x축의 방향으로 m만큼
y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면
$y = \sqrt{2(x-m)} + n = \sqrt{2x-2m} + n$이 된다.

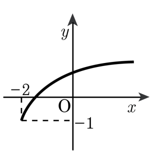
37. 함수 $y = 2\sqrt{-3x+6}+1$ 의 그래프는?

①


②


③


④


⑤


해설

$y = 2\sqrt{-3(x-2)}+1$

$\Rightarrow$ 꼭짓점 : $(2, 1)$

정의역 : $x \le 2$, 치역 : $y \ge 1$

38. $y = \sqrt{2x}$의 그래프를 x축으로 m만큼 y축으로 n만큼 평행이동하면 $y = \sqrt{2x+6} - 2$과 일치한다. $n - m$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$y = \sqrt{2x+6} - 2 = \sqrt{2(x+3)} - 2$이므로
$y = \sqrt{2x}$를 x축으로 -3만큼
y축으로 -2 만큼 평행이동하면 서로 일치한다.
따라서 $m = -3$, $n = -2$ 이므로
$\therefore n - m = 1$

39. 좌표평면에서 무리함수 $y=-\sqrt{-x+2}+1$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 모두 구하면?

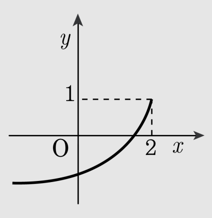
① 제 1사분면　　② 제 2사분면

③ 제 3사분면　　④ 제 1사분면, 제 2사분면

⑤ 제 3사분면, 제 4사분면

해설

무리함수의 그래프를 그려보면 아래와 같다.



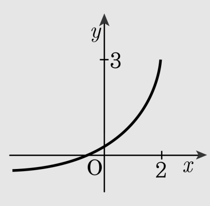
따라서, 무리함수의 그래프가 지나지 않는 것은 제 2사분면이다.

40. 무리함수 $y=-\sqrt{-2(x-2)}+3$가 지나는 모든 사분면은?

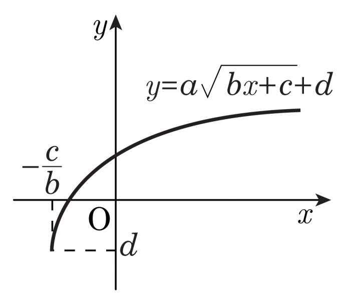
① 1 , 2 사분면
② 1 , 4 사분면
③ 1 , 2 , 3 사분면
④ 2 , 3 , 4 사분면
⑤ 1 , 3 , 4 사분면

해설

꼭지점이 $(2,3)$ 이고 $(0,1)$ 을 지나므로
$\therefore$ $1,2,3$ 사분면을 지난다.



41. 함수 $y = a\sqrt{bx+c} + d$의 그래프의 개형이 그림과 같을 때, 함수 $y = d\sqrt{ax+b} + c$의 그래프가 반드시 지나는 사분면은?

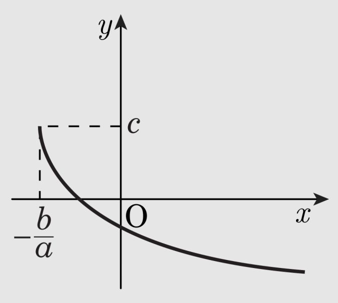


① 제 1사분면　　② 제 2사분면　　③ 제 3사분면

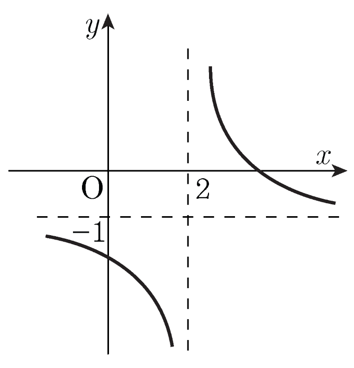
④ 제 2, 4사분면　　⑤ 제 3, 4사분면

해설

$\frac{-c}{b} < 0, d < 0, a > 0$



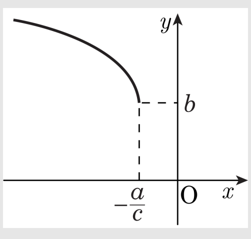
42. 분수함수 $y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 무리함수 $y=\sqrt{cx+a}+b$의 그래프가 지나는 사분면을 모두 구하면?



① 제1사분면　　② 제2사분면　　③ 제3사분면
④ 제4사분면　　⑤ 제1, 2사분면

해설

$y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 점근선은 $x=-a,\ y=c$
그림에서 $-a>0,\ c<0$이고, $b>0$
$\therefore\ a<0,\ b>0,\ c<0\cdots$㉠
한편 $y=\sqrt{cx+a}+b=\sqrt{c\left(x+\dfrac{a}{c}\right)}+b$이므로
$c\left(x+\dfrac{a}{c}\right)\ge 0$
이때 $c<0$이므로 $x\le -\dfrac{a}{c}$
㉠에서 $-\dfrac{a}{c}<0$이므로 $x<0$
또 $y=\sqrt{cx+a}+b\ge b$
따라서 그래프는 다음 그림과 같이



제2사분면만을 지난다.

43. 무리함수 $y = \sqrt{a-x} - 1$ 의 그래프가 원점을 지나고 정의역이 $\{x \mid x \le \alpha\}$, 치역이 $\{y \mid y \ge \beta\}$ 일 때, $a + \alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

주어진 무리함수의 그래프가
점 $(0,\ 0)$ 을 지나므로
$0 = \sqrt{a-1}$
$\therefore a = 1$
즉, 주어진 무리함수는 $y = \sqrt{1-x} - 1$ 이고
$1 - x \ge 0$ 에서 $x \le 1$ 이므로
정의역은 $\{x \mid x \le 1\}$
$\therefore \alpha = 1$
또, $y = \sqrt{1-x} - 1$ 에서
$y + 1 = \sqrt{1-x} - 1$ 이므로 $y + 1 \ge 0$
치역은 $\{y \mid y \ge -1\}$
$\therefore \beta = -1$
$\therefore a + \alpha + \beta = 1$

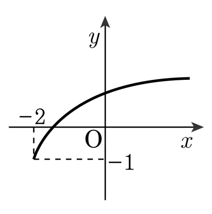
44. 정의역이 $\{x \mid x \leq 3\}$, 치역이 $\{y \mid y \geq 4\}$ 인 무리함수 $f(x) = \sqrt{a(x-p)} + q$ 에 대하여 $f(1) = 6$ 일 때, $a + p + q$ 의 값을 구하면?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

정의역은 $\left\{x \mid a(x-p) \geq 0\right\} = \{x \mid x \leq 3\}$ 이므로 $a < 0,\ p = 3$
치역은 $\{y \mid y \geq 4\}$이므로 $q = 4$
$\therefore\ f(x) = \sqrt{a(x-3)} + 4$
이때, $f(1) = 6$이므로
$\sqrt{-2a} + 4 = 6,\ \sqrt{-2a} = 2$, $-2a = 4$
$\therefore\ a = -2$
$\therefore\ a + p + q = -2 + 3 + 4 = 5$

45. 다음 그래프는 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 평행 이동한 것이다. 이 그래프의 함수는?



① $y=\sqrt{x-2}+1$

② $y=\sqrt{x-2}-1$

③ $y=\sqrt{x+2}+1$

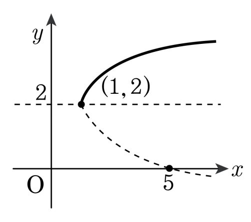
④ $y=\sqrt{x+2}-1$

⑤ $y=-\sqrt{x-2}-1$

해설

x축으로 -2만큼
y축으로 -1만큼 평행이동했으므로
x 대신 $x+2$, y 대신 $y+1$을 대입하면
$y=\sqrt{x+2}-1$

46. 다음 그래프로 나타낼 수 있는 함수는?



① $y = 2 - \sqrt{x-1}$

② $y = 2 + \sqrt{x-1}$

③ $y = 2 + \sqrt{x+1}$

④ $y = 2 - \sqrt{x+1}$

⑤ $y = 2 - \sqrt{-x+1}$

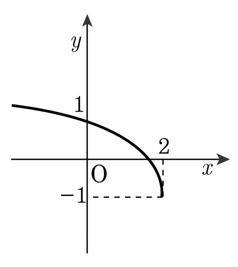
해설

$y = \sqrt{ax}$ $(a > 0)$ 의 그래프를
x축으로 1, y 축으로 2만큼 평행이동한
그래프이므로 $y = \sqrt{a(x-1)} + 2(a > 0)$ 꼴이다.
주어진 식 중에서 적당한 것은 ② 뿐이다.

해설

꼭짓점이(1, 2) 이고 변역은 $x \geq 1,\ y \geq 2$ 이므로
$x = a(y-2)^2 + 1$
점 (5, 0)을 지나므로
$5 = a(0-2)^2 + 1 \ \rightarrow \ a = 1$
$x = (y-2)^2 + 1 \ \rightarrow \ y = 2 + \sqrt{x-1}$

47. 다음 함수의 그래프의 식을 구하면?



① $y = \sqrt{-2x+4} - 1$

② $y = \sqrt{-x+1} - 1$

③ $y = -\sqrt{-2x+4} + 1$

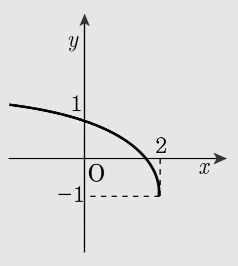
④ $y = \sqrt{x-1} - 1$

⑤ $y = \sqrt{2x-4} + 1$

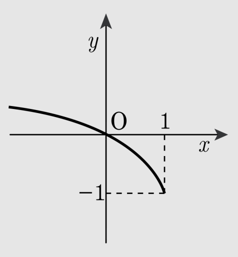
해설

보기의 함수의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

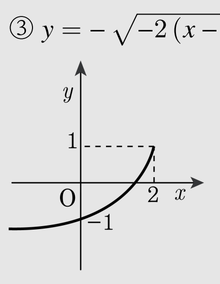
① $y = \sqrt{-2(x-2)} - 1$



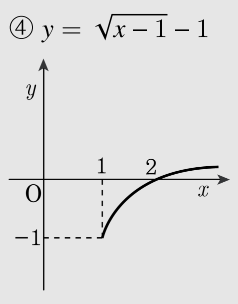
② $y = \sqrt{-(x-1)} - 1$



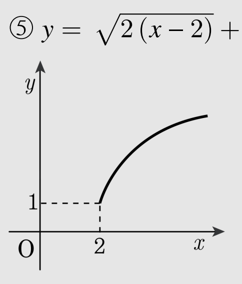
③ $y = -\sqrt{-2(x-2)} + 1$



④ $y = \sqrt{x-1} - 1$



⑤ $y = \sqrt{2(x-2)} + 1$



48. 곡선 $y = \sqrt{4x-8}$과 직선 $y = x + k$가 한 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는?

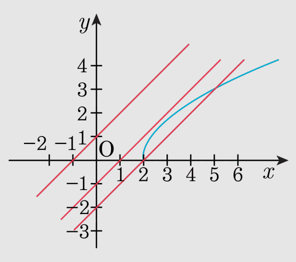
① $k = -2$ 또는 $k > 1$　　② $k = -1$ 또는 $k < -2$

③ $k = 1$ 또는 $k > 2$　　④ $k = 2$ 또는 $k < -1$

⑤ $k = -1$

해설

그래프에서 보듯이 한 점에서 만나는 경우는 접하는 경우이거나 $k < -2$인 경우이다.



접하는 경우는 $\sqrt{4x-8} = x + k$에서

$4x - 8 = x^2 + 2kx + k^2$

$x^2 + 2(k-2)x + k^2 + 8 = 0$

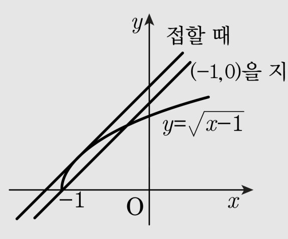
$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - (k^2+8) = -4k - 4 = 0$에서 $k = -1$

따라서 $k = -1$ 또는 $k < -2$

49. 두 함수 $y=\sqrt{x+1}$과 $y=x+a$의 그래프가 서로 다른 두 개의 교점을 가지도록 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $1 \le a < \frac{5}{4}$　　② $1 < a < \frac{5}{4}$　　③ $1 \le a \le \frac{5}{4}$
④ $2 \le a < \frac{5}{4}$　　⑤ $1 \le a < 3$

해설



그림에서

(ⅰ) $y=x+a$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때, $a=1$
(ⅱ) $y=x+a$ 와 $y=\sqrt{x+1}$ 이 접할 때
$x+a=\sqrt{x+1}$ 에서 양변을 제곱하면
$(x+a)^2=x+1$
$x^2+(2a-1)x+a^2-1=0$
$D=(2a-1)^2-4(a^2-1)=0$
$-4a+1+4=0 \Leftrightarrow 4a=5$
$\therefore a=\frac{5}{4}$

(ⅰ), (ⅱ) $1 \le a < \frac{5}{4}$

50. 무리함수 $y = \sqrt{2x+3}$ 의 그래프가 직선 $y = x + k$ 와 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $\frac{3}{2} < k < 2$　　② $\frac{3}{2} \le k < 2$　　③ $\frac{3}{2} \le k \le 2$
④ $\frac{3}{2} < k \le 2$　　⑤ $1 \le k < 2$

해설

(i) 두 그래프가 접할 때, $\sqrt{2x+3} = x + k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2 + 2(k-1)x + k^2 - 3 = 0$

이것이 중근을 가지므로

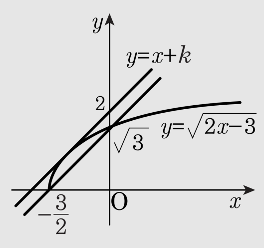
$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k^2 - 3) = -2k + 4 = 0$

$\therefore\ k = 2$

(ii) 직선 $y = x + k$가 점 $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지날때

$0 = -\frac{3}{2} + k$

$\therefore\ k = \frac{3}{2}$



(i), (ii)와 위의 그림으로부터 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 k 값의 범위는

$\frac{3}{2} \le k < 2$