

1. $x = \frac{\log_a(\log_a b)}{\log_a b}$ 일 때, 다음 중 b^x 과 같은 것은?

- ① a
- ② b
- ③ a^b
- ④ b^2
- ⑤ $\log_a b$

해설

주어진 식을 밑 변환의 공식에 의해 변형하면

$$x = \frac{\frac{\log_b(\log_a b)}{\log_b a}}{\log_b a} = \log_b(\log_a b)$$

로그의 정의에 의해 $b^x = \log_a b$

2. $\sqrt[3]{\log_2 9} \times (\log_3 16)^{\frac{1}{3}}$ 의 값은?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt[3]{2}$

④ 2

⑤ $\sqrt[4]{2}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\log_2 9} \times (\log_3 16)^{\frac{1}{3}} &= (\log_2 9)^{\frac{1}{3}} \times (\log_3 16)^{\frac{1}{3}} = (2 \log_2 3 \times \\ &4 \log_3 2)^{\frac{1}{3}} \\ &= (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2\end{aligned}$$

3. $a = \log_4(3 - \sqrt{8})$ 일 때, $2^a + 2^{-a}$ 의 값은?

① $2\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2} + 1$

③ $2\sqrt{3}$

④ $2\sqrt{3} + 1$

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

로그의 정의에 의하여

$$4^a = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2a} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2^a = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2^a = \sqrt{2} - 1$$

$$2^{-a} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{-a} = \sqrt{2} + 1$$

$$2^a + 2^{-a} = 2\sqrt{2}$$

4. $a = \frac{\log_3(\log_5 7)}{2 \log_3 2}$ 일 때, 4^a 의 값은?

- ① $\log_5 7$ ② $\log_3 5$ ③ $3^{\log_5 2}$ ④ $3^{\log_5 5}$ ⑤ $3^{\log_5 7}$

해설

$$\begin{aligned} a &= \frac{\log_3(\log_5 7)}{2 \log_3 2} \\ &= \frac{\log_3(\log_5 7)}{\log_3 2^2} \\ &= \frac{\log_3(\log_5 7)}{\log_3 4} = \log_4(\log_5 7) \\ \therefore 4^a &= \log_5 7 \end{aligned}$$

5. $\log_a(-a^2 + 5a + 6)$ 의 값이 존재하도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$\log_a(-a^2 + 5a + 6)$ 의 값이 존재하기 위해서는

(i) 밑 조건에 의하여

$a > 0, a \neq 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

(ii) 진수 조건에 의하여

$-a^2 + 5a + 6 > 0, a^2 - 5a - 6 < 0$

$(a + 1)(a - 6) < 0$

$\therefore -1 < a < 6 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 을 만족하는 정수는 2, 3, 4, 5의 4개다.

6. 모든 실수 x 에 대하여 $\log_4 \{x^2 - (a-1)x + 4\}$ 의 값이 존재하기 위한 a 의 값의 범위는?

- ① $-3 < a < 5$ ② $-3 \leq a \leq 5$ ③ $-1 < a < 1$
④ $1 < a < 3$ ⑤ $3 \leq a \leq 5$

해설

진수의 조건에서 $x^2 - (a-1)x + 4 > 0$

방정식 $x^2 - (a-1)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (a-1)^2 - 16 < 0$$

$$a^2 - 2a - 15 < 0$$

$$(a+3)(a-5) < 0$$

$$\therefore -3 < a < 5$$

7. 모든 실수 x 에 대하여 $\log_{(k-2)^2}(kx^2+kx+1)$ 이 의미를 갖기 위한 정수 k 의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\log_a b$ 에서 $a > 0, a \neq 1, b > 0$

(i) $(k-2)^2 > 0 \rightarrow k \neq 2$

(ii) $(k-2)^2 \neq 1 \rightarrow k \neq 3, 1$

(ii) $kx^2+kx+1 > 0$

$\rightarrow k=0$ 또는 $k>0$ 일때, $k^2-4k < 0$

$\therefore 0 < k < 4$

따라서 (i), (ii), (iii)를 만족하는 정수 k 는 0

8. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$)

보기

㉠ $\log_a(b+c) = \log_a b \cdot \log_a c$

㉡ $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$

㉢ $\log_a b^c = (\log_a b)^c$

㉤ $\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b$

① ㉠, ㉤

② ㉡, ㉢

③ ㉡, ㉤

④ ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\log_a(b+c) \neq \log_a b \cdot \log_a c$ (거짓)

㉡ $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$ (참)

㉢ $\log_a b^c = c \log_a b \neq (\log_a b)^c$ (거짓)

㉤ $\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b$ (참)

따라서 옳은 것은 ㉡, ㉤이다.

9. $\log_{10}(1+1) + \log_{10}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_{10}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_{10}\left(1 + \frac{1}{99}\right)$
의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \log_{10} 2 + \log_{10} \frac{3}{2} + \log_{10} \frac{4}{3} + \cdots + \log_{10} \frac{100}{99} \\&= \log_{10} \left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{100}{99} \right) \\&= \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10 = 2\end{aligned}$$

10. $\log_3 2 + \log_3 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_3 \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_3 \left(1 + \frac{1}{80}\right)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & \log_3 2 + \log_3 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_3 \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_3 \left(1 + \frac{1}{80}\right) \\ &= \log_3 2 + \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{4}{3} + \cdots + \log_3 \frac{81}{80} \\ &= \log_3 \left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{81}{80}\right) \\ &= \log_3 81 = \log_3 3^4 \\ &= 4\log_3 3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

11. $\log_a 27 = -2, \log_{\sqrt{3}} b = 3$ 일때, ab 의 값은?

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

해설

$$\log_a 27 = -2 \text{에서 } a^{-2} = 27 = 3^3$$

$$\therefore a = 3^{-\frac{3}{2}} (\because a > 0)$$

$$\log_{\sqrt{3}} b = 3 \text{에서 } b = (\sqrt{3})^3 = (3^{\frac{1}{2}})^3 = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore ab = 3^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} = 3^0 = 1$$

12. $\frac{\log_2 \frac{3}{\sqrt[3]{3}} + \log_2 \frac{4}{\sqrt[4]{16}} - \log_2 10 \sqrt[3]{10}}{\log_2 \sqrt{0.12}}$ 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

밑이 모두 같으므로 로그의 합 또는 로그의 차로 정리한다.

$$\begin{aligned} (\text{분자}) &= \log_2 3^{\frac{2}{3}} + \left(2 - \log_2 16^{\frac{1}{4}}\right) - \log_2 10^{\frac{4}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \log_2 3 + \left(2 - \frac{1}{6} \log_2 16\right) - \frac{4}{3} \log_2 10 \\ &= \frac{2}{3} \log_2 3 + 2 - \frac{4}{6} - \frac{4}{3} (1 + \log_2 5) \\ &= \frac{2}{3} \log_2 3 - \frac{4}{3} \log_2 5 = \frac{2}{3} (\log_2 3 - 2 \log_2 5) \\ &= \frac{2}{3} \log_2 \frac{3}{25} = \frac{2}{3} \log_2 0.12 \end{aligned}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{\frac{2}{3} \log_2 0.12}{\frac{1}{2} \log_2 0.12} = \frac{4}{3}$$

13. 모든 실수 x 에 대하여 $\log_{|a-3|}(3ax^2 - ax + 1)$ 이 정의되기 위한 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

(i) 밑의 조건에서 $|a-3| > 0$ 이고 $|a-3| \neq 1$

$\therefore a \neq 3, a \neq 2, a \neq 4 \cdots \cdots \textcircled{1}$

(ii) 진수조건에서 $3ax^2 - ax + 1 > 0$

① $a = 0$ 일 때, $1 > 0$ 이므로 성립

② $a > 0$ 일 때, 방정식 $3ax^2 - ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 12a < 0, a(a-12) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 12$$

①, ②에서 $0 \leq a < 12 \cdots \cdots \textcircled{2}$

①, ②을 동시에 만족하는 정수는 0, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11의 9개다.

14. 다음은 지수법칙 $a^{r+s} = a^r a^s$ 으로부터 모든 양수 x, y 에 대하여 $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ 가 성립함을 증명한 것이다. (단, $a > 0, a \neq 1$)

$r = \log_a x, s = \log_a y$ 로 놓으면
 $a^r = x, a^s = \text{㉠}$
지수법칙으로부터 $a^{r+s} = \text{㉡}$
로그의 정의에 의하여 $r + s = \log_a \text{㉢}$
따라서, $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ 이다.

- ① $x, x + y$

② $y, x + y$

③ x, xy
- ④ y, xy

⑤ $x, \frac{y}{x}$

해설

$s = \log_a y$ 이므로 $y = a^s \therefore \text{㉠} y$
 $a^{r+s} = a^r a^s = xy \therefore \text{㉡} xy$

15. a, b 가 유리수라 하면 서로소인 두 정수 p, q 에 대하여 $\log_6(2^a \cdot 3^b) = \frac{q}{p}$ (단, $p = q$)로 쓸 수 있다.

로그의 정의에 의하여 $2^a \cdot 3^b = 6^{\frac{q}{p}}$
이때, $ap =$ (가) 이고 $a \neq b$ 이므로 (나) 이것은 가정에 모순이다.
따라서, $\log_6(2^a \cdot 3^b)$ 은 무리수이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례대로 적은 것은?

- ① $bp, p = q$
- ② $bp, p = 0$
- ③ $bp, p = 0$
- ④ $bp, q = q$
- ⑤ $bp, p = 0$

해설

$2^a \cdot 3^b = 6^{\frac{q}{p}}$ 에서 $(2^a \cdot 3^b)^p = 6^q = (2 \cdot 3)^q$
 $\therefore 2^{ap} \cdot 3^{bp} = 2^q \cdot 3^q$ 에서 $ap = bp \cdots$ (가)
 $(a - b)p = 0$
 $a \neq b$ 이므로 $p = 0 \cdots$ (나)

16. 자연수 x, y 가 $\log_3 x + \log_9 y^2 = \log_3(2x + y + 2)$ 를 만족시킬 때, $2x + y$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$xy = 2x + y + 2, \quad xy - 2x - y + 2 = 4$$

$(x-1)(y-2) = 4$, x, y 는 자연수이므로

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y-2=4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x-1=2 \\ y-2=2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x-1=4 \\ y-2=1 \end{cases}$$

$x=5, y=3$ 일 때, $2x+y$ 의 최댓값은 13이다.