1. 분수식 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}$ 을 간단히 하면 $\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$ 일 때, 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -6　　② -3　　③ 0　　④ 3　　⑤ 6

해설

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}$$
$$=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}\right)+\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4}\right)$$
$$=\frac{-2}{(x-1)(x-3)}+\frac{-2}{(x-2)(x-4)}$$
$$=\frac{-2(x^2-6x+8+x^2-4x+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$
$$=\frac{-2(2x^2-10x+11)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$
$$=\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$
$\therefore\ a=-4,\ b=20,\ c=-22$

$\therefore\ a+b+c=-6$

2. 다음 식을 계산하면?

$$\frac{x^3-1}{x^4+x^2+1}\times\frac{x^3+1}{x^4-1}$$

① x ② x^2 ③ $\frac{1}{x}$

④ $\frac{1}{x^2}$ ⑤ $\frac{1}{x^2+1}$

해설

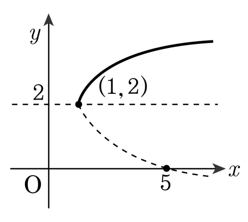
$\frac{x^3-1}{x^4+x^2+1}\times\frac{x^3+1}{x^4-1}$

$=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$

$\times\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}$

$=\frac{1}{x^2+1}$

3. 다음 그래프로 나타낼 수 있는 함수는?



① $y=2-\sqrt{x-1}$

② $y=2+\sqrt{x-1}$

③ $y=2+\sqrt{x+1}$

④ $y=2-\sqrt{x+1}$

⑤ $y=2-\sqrt{-x+1}$

해설

$y=\sqrt{ax}\ (a>0)$ 의 그래프를
x축으로 1, y 축으로 2만큼 평행이동한
그래프이므로 $y=\sqrt{a(x-1)}+2(a>0)$ 꼴이다.
주어진 식 중에서 적당한 것은 ② 뿐이다.

해설

꼭짓점이(1, 2) 이고 변역은 $x \geq 1,\ y \geq 2$ 이므로
$x=a(y-2)^2+1$
점 (5, 0)을 지나므로
$5=a(0-2)^2+1 \rightarrow a=1$
$x=(y-2)^2+1 \rightarrow y=2+\sqrt{x-1}$

4. 등비수열 $-3,\ 6,\ -12,\ 24,\ -48,\cdots$ 에서 384는 제 몇 항인가?

① 제 6항　② 제 7항　③ 제 8항
④ 제 9항　⑤ 제 10항

해설

주어진 등비수열의 일반항을 a_n이라 하면 첫째항이 -3이고, 공비가 -2이므로
$a_n = (-3)\cdot(-2)^{n-1}$
$(-3)\cdot(-2)^{n-1} = 384$에서 $(-2)^{n-1} = -128 = (-2)^7$
$n-1=7 \quad \therefore\ n=8$

5. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 1,\ a_{11} = 32$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_{k+1} - a_k)$의 값은?

① 25 ② 27 ③ 29 ④ 31 ⑤ 33

해설

$\sum_{k=1}^{10}(a_{k+1} - a_k)$
$= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{11} - a_{10})$
$= a_{11} - a_1 = 32 - 1 = 31$

6. 양수 a에 대하여 $(a^{2\sqrt{3}})^{\sqrt{2}} \div (a^{-\sqrt{54}})$를 간단히 하면?

① $a^{\sqrt{\frac{3}{2}}}$ ② $a^{\sqrt{2}}$ ③ $a^{-\sqrt{16}}$ ④ $a^{5\sqrt{6}}$ ⑤ a^{36}

해설

지수를 따로 써 보면
$2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{54} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$
$= 5\sqrt{6}$
$\therefore\ a^{5\sqrt{6}}$

7. $\log_a \sqrt{3} = \log_b 9$ 일 때, $\log_{ab} b$ 의 값은?

① 2 ② $\frac{8}{5}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$\log_a \sqrt{3} = \log_b 9$ 에서

$\frac{\log \sqrt{3}}{\log a} = \frac{\log 9}{\log b}$, $\frac{\frac{1}{2}\log 3}{\log a} = \frac{2\log 3}{\log b}$

$\frac{\log b}{\log a} = 4$

즉, $\log_a b = 4$

$\therefore \log_{\sqrt{ab}} b = \frac{\log_a b}{\log_a \sqrt{ab}}$

$= \frac{\log_a b}{\frac{1}{2}\log_a ab} = \frac{2\log_a b}{1 + \log_a b} = \frac{8}{5}$

8. $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} \neq 0$일 때, $\frac{xy}{x^2+2y^2}$의 값을 구하면?

① $\frac{2}{17}$ ② $\frac{3}{17}$ ③ $\frac{4}{17}$ ④ $\frac{5}{17}$ ⑤ $\frac{6}{17}$

해설

$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}y$

$\therefore \frac{xy}{x^2+2y^2} = \frac{\frac{4}{3}y^2}{\frac{16}{9}y^2+2y^2} = \frac{6}{17}$

9. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$일 때, $\sqrt{(a-b)^2} - |b|$를 간단히 하면?

① $-2a$ ② $-a$ ③ $a-2b$

④ a ⑤ 0

해설

$a \geq 0,\ b < 0$

$|a-b| - |b| = (a-b) + b = a$

10. $y=\dfrac{3x+1}{2x-1}$ 의 점근선의 방정식을 구하면 $x=a,\ y=b$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=2$

해설

$y=\dfrac{3x+1}{2x-1}$

$=\dfrac{3\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$

$=\dfrac{\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+\dfrac{3}{2}$

따라서 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{3}{2}\quad a+b=2$

11. 분수함수 $y=\dfrac{ax+b}{x-1}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(2,\ 3)$ 을 지날 때, 상수 $a,\ b$ 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x-1}$ 라 하면 $f(2)=3,\ f^{-1}(2)=3$

$f(2)=2a+b=3\cdots$㉠

$f^{-1}(2)=3$ 에서 $f(3)=2$ 이므로

$f(3)=\dfrac{3a+b}{2}=2\quad\therefore 3a+b=4\cdots$㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=1\quad\therefore ab=1$

12. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_4 : a_9 = 2 : 5$일 때, a_{15}의 값은?

① 40　② 43　③ 46　④ 49　⑤ 52

해설

첫째항을 a라 하면 $a_n = a + (n-1) \cdot 3$이므로

$a_4 = a + 9,\ a_9 = a + 24$

이때, $(a+9) : (a+24) = 2 : 5$에서

$5(a+9) = 2(a+24)$

$\therefore\ a = 1$

$\therefore\ a_{15} = 1 + (15-1) \cdot 3 = 43$

13. 첫째항이 1이고 공차가 자연수 d인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $n \geq 3$일 때, $S_n = 94$를 만족하는 d의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$S_n = 94$에서 $\frac{n\{2+(n-1)d\}}{2} = 94$

$n\{2+(n-1)d\} = 2 \cdot 94 = 2^2 \cdot 47$

그런데 $n \geq 3$이므로 n의 값이 될수 있는 것은 4, 47, 94, 188 이다.

$n = 4$일때, $2+(4-1)d = 47$ $\quad \therefore\ d = 15$

$n = 47$일때, $2+(47-1)d = 4$ $\quad \therefore\ d = \frac{2}{23}$

$n = 94$일때, $2+(94-1)d = 2$ $\quad \therefore\ d = 0$

$n = 188$일때, $2+(188-1)d = 1$ $\quad \therefore\ d = -\frac{1}{187}$

이 중에서 d가 자연수가 되는 것은 $n = 4$이므로 $d = 15$

14. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n$일 때, a_{100}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 196

해설

$$\begin{aligned} a_{100} &= S_{100} - S_{99} \\ &= 100^2 - 3 \cdot 100 - (99^2 - 3 \cdot 99) \\ &= (100^2 - 99^2) - 3(100 - 99) \\ &= 199 - 3 \\ &= 196 \end{aligned}$$

15. 제 3 항이 6 이고 제 7 항이 96 인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_3 = ar^2 = 6 \cdots\cdots$ ㉠

$a_7 = ar^6 = 96 \cdots\cdots$ ㉡

㉡ $\div$ ㉠에서 $r^4 = 16$

$r = \pm 2, \quad \therefore r = 2 \ (\because r > 0)$

㉠에 대입하면 $a = \frac{3}{2}$

첫째항은 $\frac{3}{2}$, 공비는 2 이므로 곱은 3

16. 수열 $\omega,\ \omega^3,\ \omega^5,\ \omega^7,\ \cdots$ 의 첫째항부터 제 36 항까지의 합을 구하여라. $(\omega^3 = 1)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω, 공비가 ω^2, 항수가 36 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{\omega\left\{(\omega^2)^{36} - 1\right\}}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$

$$\therefore\ S = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$$

17. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n + 2$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$, $S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ 이므로

$a_{10} = S_{10} - S_9$
$= (10^2 - 3 \cdot 10 + 2) - (9^2 - 3 \cdot 9 + 2)$
$= (10^2 - 9^2) - 3(10 - 9)$
$= 16$

18. 다음 수열의 합을 $\sum$ 기호를 써서 나타내면?

$$3+6+12+\cdots+3\cdot 2^{n-1}$$

① $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$　② $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k-1}$　③ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k}$

④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k}$　⑤ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k+1}$

해설

제 k항은 $3\cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n이므로

$3+6+9+\cdots+3\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$

19. $\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$ 의 값은?

① -5 ② -7 ③ -8 ④ -79 ⑤ -80

해설

$\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$
$=\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{80}-\sqrt{81}$
$=\sqrt{1}-\sqrt{81}$
$=1-9=-8$

20. 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $a^2-3ab+b^2=0$이 성립할 때, $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

준식의 양변을 ab로 나누면 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=3$

$\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}=\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2-2=9-2=7$

따라서, 구하는 식의 값은 7이다.

21. 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f^{-1}(\sqrt{x+a}-1) = x+b$, $f(1)=0$일 때, $a-b$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

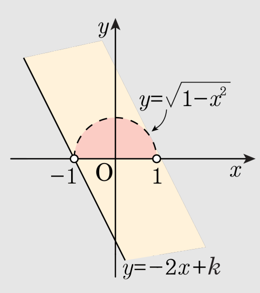
$f^{-1}(\sqrt{x+a}-1) = x+b$에서
$f(x+b) = \sqrt{x+a}-1$
이 때, $f(1)=0$이므로
위의 식에 $x=1-b$를 대입하면
$f(1-b+b) = \sqrt{1-b+a}-1$
$0 = \sqrt{1-b+a}-1$, $\sqrt{a-b+1}=1$
$a-b+1=1$
$\therefore a-b=0$

22. $A = \{(x, y) \mid 0 \le y < \sqrt{1 - x^2}\}$, $B = \{(x, y) \mid 2x + y > k\}$ 에서 $A \cap B = A$ 가 되게 하는 k 의 범위를 구하면?

① $k \le -2$　　② $k < -2$　　③ $k > -2$
④ $k \ge -2$　　⑤ $k \ne -2$

해설

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ 이므로
그림을 그려 부등식의 영역으로 표시하면
집합 B 에서 $y > -2x + k$ 이므로
점 $(-1,\ 0)$ 를 지날 때, $k = -2$ 이다.
따라서, $A \subset B$ 이려면 $k \le -2$



23. $a_1 = 20,\ a_{n+1} = a_n - 3\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_k = -22$를 만족시키는 자연수 k의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 20, 공차가 -3인 등차수열이므로
$a_n = 20 + (n-1) \times (-3) = -3n + 23$
즉, $a_k = -3k + 23 = -22$에서 $-3k = -45$
$\therefore k = 15$

24. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_n + n^2 (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 290

해설

$a_{n+1} = a_n + n^2$ 의 n 에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$ 를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_1 = a_1 + 1^2 \\ & a_3 = a_2 + 2^2 \\ & a_4 = a_3 + 3^2 \\ & \quad\vdots \\ +) & \underline{a_{10} = a_9 + 9^2} \end{array}$$

$$a_{10} = a_1 + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2)$$

$$= 5 + \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6}$$

$$= 290$$

25. 다음은 모든 자연수 n에 대하여
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n = 1$일 때, (좌변)$= 1 \cdot 2 = 2$, (우변)$= (1-1) \cdot 2^2 + 2 = 2$ 이므로 주어진 등식이 성립한다.
> (ii) $n = k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
> $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$
> $= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$
> 이 식의 양변에 $\boxed{(\text{가})}$을 더하면
> $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(\text{가})}$
> $= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(\text{가})}$
> $= \boxed{(\text{나})} \cdot 2^{k+2} + 2$
> 따라서, $n = k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

② (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

③ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

④ (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

⑤ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

해설

(ii) $n = k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$
이 식의 양변에 $\boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$을 더하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$
$= \boxed{k} \cdot 2^{k+2} + 2$
따라서, $n = k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

26. $\log_5 2 = a, \log_5 3 = b$라 할 때, $\log_{24} \sqrt{18}$을 a, b를 사용하여 나타낸 것은?

① $\dfrac{a+2b}{2(a+3b)}$ ② $\dfrac{a+2b}{2(3a+b)}$ ③ $\dfrac{2a+b}{2(3a+b)}$
④ $\dfrac{2(a+2b)}{3a+b}$ ⑤ $\dfrac{2(2a+b)}{a+3b}$

해설

$\log_{24} \sqrt{18} = \dfrac{\log_5 \sqrt{18}}{\log_5 24}$ 에서

$\log_5 \sqrt{18} = \dfrac{1}{2} \log_5 18 = \dfrac{1}{2} \log_5 (2 \cdot 3^2)$

$= \dfrac{1}{2}(\log_5 2 + 2 \log_5 3) = \dfrac{1}{2}(a+2b)$

$\log_5 24 = \log_5 (2^3 \cdot 3) = 3 \log_5 2 + \log_5 3 = 3a + b$

$\therefore \log_{24} \sqrt{18} = \dfrac{\log_5 \sqrt{18}}{\log_5 24} = \dfrac{\frac{1}{2}(a+2b)}{3a+b} = \dfrac{a+2b}{2(3a+b)}$

27. 이차방정식 $2x^2 - 8x + 1 = 0$의 두 근이 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$일 때, $\log_\alpha 2 + \log_\beta 2 + \log_{\alpha\beta} 2$의 값은?

① $\frac{19}{4}$ ② $\frac{23}{4}$ ③ $\frac{27}{4}$ ④ $\frac{33}{4}$ ⑤ $\frac{35}{4}$

해설

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 4,\ \ \log_2 \alpha \cdot \log_2 \beta = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\log_\alpha 2 + \log_\beta 2 &= \frac{1}{\log_2 \alpha} + \frac{1}{\log_2 \beta} \\ &= \frac{\log_2 \alpha + \log_2 \beta}{\log_2 \alpha \cdot \log_2 \beta} \\ &= \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8\end{aligned}$$

$\log_2 \alpha\beta = 4$이므로 $\alpha\beta = 2^4$

$\therefore \log_{\alpha\beta} 2 = \log_{2^4} 2 = \frac{1}{4}$

$\therefore \log_\alpha 2 + \log_\beta 2 + \log_{\alpha\beta} 2 = 8 + \frac{1}{4} = \frac{33}{4}$

28. 실수 x를 넘지 않는 최대의 정수를 $[x]$라고 하고 $\{x\} = x - [x]$로 정의하자 $x = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$일 때, $\left[\left\{\{x\}^{-1}\right\}^{-1}\right]$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}} = \sqrt{28 - 2\sqrt{25 \times 3}} = 5 - \sqrt{3}$

$[5 - \sqrt{3}] = [3.2\cdots\cdots] = 3$

$\{x\} = (5 - \sqrt{3}) - 3 = 2 - \sqrt{3},$

$\{x\}^{-1} = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

$\left\{2 + \sqrt{3}\right\} = 2 + \sqrt{3} - [2 + \sqrt{3}] = \sqrt{3} - 1$

$\left\{2 + \sqrt{3}\right\}^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{3} - 1} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1.3\cdots\cdots$

따라서, $\left\{\{x\}^{-1}\right\}^{-1} = 1$

29. $x = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ 일 때, $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 1$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 7

해설

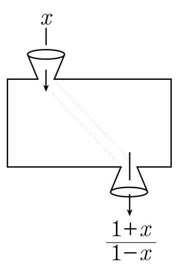
$x = \sqrt{2} + 1,\ (x-1)^2 = (\sqrt{2})^2$ 에서

$x^2 - 2x - 1 = 0$

(준식) $= (x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2) + 3$

$= 0 \times (x^2 + 2) + 3 = 3$

30. 다음 그림과 같이 x를 넣으면 $\dfrac{1+x}{1-x}$가 나오는 상자가 있다. 이 상자에 x_1을 넣었을 때, 나오는 것을 x_2, x_2를 다시 넣었을 때 나오는 것을 x_3라 한다. 이와 같이 계속하여 x_n을 넣었을 때 나오는 것을 x_{n+1}이라 한다. $x_1=-\dfrac{1}{2}$일 때, x_{2000}을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$x_1=-\dfrac{1}{2}$이면

$$x_2=\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}$$

$$x_3=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2,$$

$$x_4=\frac{1+2}{1-2}=-3,$$

$$x_5=\frac{1+(-3)}{1-(-3)}=-\frac{1}{2},\ x_6=\frac{1}{3},\cdots$$

그러므로 $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 일 때

$x_{4k+1}=-\dfrac{1}{2},\ x_{4k+2}=\dfrac{1}{3},\ x_{4k+3}=2,\ x_{4k+4}=-3$

따라서, $2000=4\times499+4$이므로

$x_{2000}=x_4=-3$

31. 수열 $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \cdots$ 에 대하여 제100항은?

① $\frac{6}{13}$ ② $\frac{7}{13}$ ③ $\frac{6}{14}$ ④ $\frac{7}{14}$ ⑤ $\frac{6}{15}$

해설

주어진 수열을 $\left(\frac{1}{1}\right)$, $\left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \cdots$ 과 같이 군으로 묶으면

각 군의 항수는 1, 2, 3, $\cdots$ 이다.

즉, $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \leq 100$ 에서

$n = 13$ 일 때 $\frac{13 \cdot 14}{2} = 91$ 이므로 제13군까지의 항의 개수가 91 이다.

따라서 제100항은 제14군의 9번째 수이다.

그러므로 제100항의 값은 $\frac{14-8}{14} = \frac{6}{14}$

32. n이 2이상의 자연수일 때, 거듭제곱에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ n이 홀수일 때, $\sqrt[n]{-5} = -\sqrt[n]{5}$이다.

㉡ n이 짝수일 때, $\sqrt[n]{(-5)^n} = -5$이다.

㉢ n이 홀수일 때, $x^n = -5$를 만족하는 실수 x는 1개다.

㉣ n이 짝수일 때, $x^n = 5$를 만족하는 실수 x는 n개다.

① ㉠, ㉢　② ㉡, ㉢　③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉣　⑤ ㉠, ㉢, ㉣

해설

㉠ n이 홀수일 때, 양변을 n제곱하면

$(\sqrt[n]{-5})^n = -5,\ (-\sqrt[n]{5})^n = -5$

$\therefore \sqrt[n]{-5} = -\sqrt[n]{5}$

㉡ n이 짝수일 때, $\sqrt[n]{(-5)^n} = 5$

㉢ n이 홀수일 때, $x^n = -5$를 만족하는 실수 x는 $\sqrt[n]{-5}$의 1개이다.

㉣ n이 짝수일 때, $x^n = 5$를 만족하는 실수 x는 $\pm\sqrt[n]{5}$의 2개이다.

이상에서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

33. $x = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}$ 일 때, $x^3 - 3x - 1$ 의 값은?

① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{21}{4}$ ⑤ $\frac{25}{4}$

해설

$2^{\frac{2}{3}} = a$라 하면 $2^{-\frac{2}{3}} = a^{-1}$ $\therefore x = a + a^{-1}$

$x^2 = (a + a^{-1})^2 = a^2 + 2aa^{-1} + a^{-2} = a^2 + 2 + a^{-2}$ 이므로

$x^3 - 3x - 1 = x(x^2 - 3) - 1$

$= (a + a^{-1})(a^2 - 1 + a^{-2}) - 1$

$= a^3 + a^{-3} - 1$

$= 2^2 + 2^{-2} - 1$

$= 4 + \frac{1}{4} - 1 = \frac{13}{4}$

해설

$$\begin{aligned} x^3 &= (2^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}})^4 \\ &= 2^2 + 2^{-2} + 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{2}{3}}(2^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}) \\ &= 4 + \frac{1}{4} + 3x \end{aligned}$$

$\therefore x^3 - 3x = 4 + \frac{1}{4}$

$\therefore x^3 - 3x - 1 = \frac{13}{4}$