

1. 첫째항이 $\frac{7}{4}$, 공차가 $\frac{3}{4}$ 인 등차수열의 첫째항부터 제 17항까지의 합은?

- ① $\frac{167}{4}$ ② $\frac{235}{4}$ ③ $\frac{527}{4}$ ④ $\frac{1105}{4}$ ⑤ $\frac{1054}{4}$

해설

$$\text{구하는 합을 } S_{17} = \frac{17 \left\{ 2 \cdot \frac{7}{4} + (17-1) \cdot \frac{3}{4} \right\}}{2} = \frac{527}{4}$$

2. $\sum_{k=1}^5 a_k = 5$, $\sum_{k=1}^5 b_k = 7$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 (3a_k + 2b_k)$ 의 값은?

① 21

② 22

③ 23

④ 24

⑤ 29

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 (3a_k + 2b_k) &= \sum_{k=1}^5 3a_k + \sum_{k=1}^5 2b_k \\ &= 3 \sum_{k=1}^5 a_k + 2 \sum_{k=1}^5 b_k \\ &= 3 \times 5 + 2 \times 7 = 15 + 14 = 29\end{aligned}$$

3. 수열 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, ...에서 2014번째 항은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

주어진 수열은 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자가 반복되므로
 $2014 = 5 \times 402 + 4$ 에서 2014번째 항은 4이다.

4. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 할 때, a_{2015} 의 값은?

- ① $\frac{2012}{2013}$ ② $\frac{2013}{2014}$ ③ $\frac{2014}{2015}$ ④ $\frac{2015}{2016}$ ⑤ $\frac{2016}{2017}$

해설

주어진 수열의 각 항에서 분모는 분자보다 1만큼 크므로 제 n 항의 분자는 n 이고 분모는 $n+1$ 이다.

따라서 구하는 수열의 일반항 a_n 은 $a_n = \frac{n}{n+1}$ 이다.

$$\therefore a_{2015} = \frac{2015}{2015+1} = \frac{2015}{2016}$$

5. 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① -2 는 -16 의 네제곱근이다.
- ② 4 는 16 의 세제곱근이다.
- ③ 8 의 세제곱근은 2 뿐이다.
- ④ 81 의 네제곱근은 $3, -3$ 이다.
- ⑤ -4 는 -64 의 세제곱근이다.

해설

- ① $(-2)^4 = 16 \neq -16$ 이므로 -2 는 -16 의 네제곱근이 아니다.
- ② $4^3 = 64 \neq 16$ 이므로 4 는 16 의 세제곱근이 아니다.
- ③ 8 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = 8$ 이므로
$$x^3 - 8 = 0$$
$$(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$
$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -1 \pm \sqrt{3}i$$
따라서, 8 의 세제곱근은 2 외에도 $-1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$ 가 있다.
- ④ 81 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 81$ 이므로
$$x^4 - 81 = 0$$
$$(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$$
$$(x+3)(x-3)(x^2 + 9) = 0$$
$$\therefore x = \pm 3 \text{ 또는 } x = \pm 3i$$
따라서, 81 의 네제곱근은 $3, -3$ 외에도 $3i, -3i$ 가 있다.
- ⑤ $(-4)^3 = -64$ 이므로 -4 는 -64 의 세제곱근이다.

6. $\sqrt[3]{9^4} \div \sqrt{3^3} \times \sqrt[6]{\frac{1}{3}}$ 의 값을 구하면?

① 9

② 3

③ $\sqrt{3}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{9^4} \div \sqrt{3^3} \times \sqrt[6]{\frac{1}{3}} &= (3^2)^{\frac{4}{3}} \div 3^{\frac{3}{2}} \times (3^{-1})^{\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{8}{3} - \frac{3}{2} - \frac{1}{6}} \\ &= 3\end{aligned}$$

7. 다음 식의 값은?

$$2^8 \times 3^5 \times 6^{-6}$$

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{8}{3}$

④ $\frac{3}{8}$

⑤ $\frac{16}{9}$

해설

$$\begin{aligned} 2^8 \times 3^5 \times 6^{-6} &= 2^8 \times 3^5 \times (2 \times 3)^{-6} \\ &= 2^8 \times 3^5 \times 2^{-6} \times 3^{-6} \\ &= 2^{8+(-6)} \times 3^{5+(-6)} \\ &= 2^2 \times 3^{-1} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

8. $\log_x 9 = \frac{2}{3}$ 를 만족하는 x 의 값은?

① 3

② 9

③ 27

④ 30

⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$$\log_x 9 = \frac{2}{3} \text{에서 } x^{\frac{2}{3}} = 9$$

$$\text{양변을 } \frac{3}{2} \text{ 제곱하면 } (x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore x = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 27$$

9. $\log_3(x-5)^2$ 의 값이 존재하기 위한 x 의 범위는?

- ① $x > 4$ ② $x < 5$ ③ $x > 5$ ④ $x \neq 4$ ⑤ $x \neq 5$

해설

$(x-5)^2 > 0$ 로부터 $x \neq 5$

10. 양수 A 에 대하여 $\log A = -2.341$ 일 때, 정수 부분과 소수 부분을 바르게 나타낸 것은?

- ① 정수 부분 : -1 , 소수 부분 : 0.659
- ② 정수 부분 : -2 , 소수 부분 : 0.341
- ③ 정수 부분 : -2 , 소수 부분 : 0.659
- ④ 정수 부분 : -3 , 소수 부분 : 0.341
- ⑤ 정수 부분 : -3 , 소수 부분 : 0.659

해설

$$\begin{aligned} -2.341 &= -2 - 0.341 = (-2 - 1) + (1 - 0.341) \\ &= -3 + 0.659 \end{aligned}$$

따라서 정수 부분은 -3 , 소수 부분은 0.659 이다.

11. 무리함수 $y = \sqrt{2x+1} + 2$ 의 그래프를 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ 에 의해 옮긴 그래프의 식이 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 일 때, 상수 a, b, c 의 합 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = \sqrt{2x+1} + 2$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y = \sqrt{2(x-a)} + 1 + 2 + b$
 $= \sqrt{2x-2a+1} + 2 + b$
이 식이 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 와 같으므로
 $a = 2, -2a+1 = b, 2+b = c$
따라서, $a = 2, b = -3, c = -1$ 이므로
 $\therefore a + b + c = -2$

12. $y = \sqrt{4x-12} + 5$ 의 그래프는 함수 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축으로 α , y 축으로 β 만큼 평행이동한 것이다. $\alpha + \beta$ 의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = 2\sqrt{x-3} + 5$ 이므로,
이것은 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를
 x 축 방향으로 3만큼,
 y 축 방향으로 5만큼
평행이동한 그래프의 함수이다.
즉, $\alpha = 3, \beta = 5$
 $\therefore \alpha + \beta = 8$

13. $x > 2$ 에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$ 가

$f(x) = \sqrt{x-2} + 2, g(x) = \frac{1}{x-2} + 2$ 일 때, $(f \circ g)(3) + (g \circ f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$$

$$\therefore (f \circ g)(3) + (g \circ f)(3) = 6$$

14. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n - 1$ 일 때, a_{20} 의 값은?

① 38

② 39

③ 41

④ 42

⑤ 43

해설

$$a_{20} = S_{20} - S_{19}$$

$$S_{20} = 20^2 + 40 - 1 = 439,$$

$$S_{19} = 19^2 + 38 - 1 = 398$$

$$\therefore a_{20} = 439 - 398 = 41$$

15. 첫째항이 6, 공차가 -5인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 -44는 제 몇 항인가?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

첫째항이 6이고, 공차가 5이므로 일반항은 a_n 은

$$a_n = 6 + (n - 1) \cdot (-5) = -5n + 11$$

$$-5n + 11 = -44$$

$$5n = 55 \quad \therefore n = 11$$

16. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

a_n 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32$$

$$\therefore 4a + 48d = 32$$

$$a + 12d = 8$$

$$\begin{aligned} S_{25} &= \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} \\ &= \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} \\ &= 25 \times 8 = 200 \end{aligned}$$

17. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n - 1$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$a_{10} = S_{10} - S_9$$

$$S_{10} = 10^2 + 20 - 1 = 119,$$

$$S_9 = 9^2 + 18 - 1 = 98$$

$$\therefore a_{10} = 119 - 98 = 21$$

18. 다음 보기의 수열 중 등비수열인 것은?

보기

㉠ $\{2n + 1\}$

㉡ $\{n^2\}$

㉢ $\{3^{n+1}\}$

㉣ $\{5 \cdot 3^{n-2}\}$

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉢ ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣, ㉣

해설

등비수열은 ar^{n-1} 의 꼴로 나타낼 수 있는 수열이므로

㉢ $3^{n+1} = 3^2 \cdot 3^{n-1}$
첫째항 = 3^2 , 공비 = 3

㉣ $5 \cdot 3^{n-2} = \frac{5}{3} \cdot 3^{n-1}$
첫째항 = $\frac{5}{3}$, 공비 = 3

19. 3과 75의 등비중항을 x , 3과 75의 등차중항을 y 라 할 때, $x + y$ 의 값은?

① 45

② 48

③ 49

④ 50

⑤ 54

해설

x 는 3과 75의 등비중항이므로

$$x^2 = 3 \times 75 = 15^2$$

$$\therefore x = 15$$

y 는 3과 75의 등차중항이므로

$$2y = 3 + 75 = 78$$

$$\therefore y = 39$$

$$\therefore x + y = 15 + 39 = 54$$

20. 수열 $\omega, \omega^3, \omega^5, \omega^7, \dots$ 의 첫째항부터 제 36항까지의 합을 구하여라.
($\omega^3 = 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω , 공비가 ω^2 , 항수가 36인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{\omega \{ (\omega^2)^{36} - 1 \}}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$$

$$\therefore S = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$$

21. $x \geq 0$ 일 때, $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ 를 간단히 하면?

- ① $x\sqrt{x}$ ② $x\sqrt[4]{x}$ ③ $\sqrt[4]{x}$ ④ $\sqrt[8]{x^3}$ ⑤ $\sqrt[8]{x^7}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \\ &= \sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}} \\ &= \sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{4}}} \\ &= (x^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{8}} \end{aligned}$$

22. $\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt[4]{8}}$ 을 $\sqrt{2^k}$ 의 꼴로 나타낼 때, 상수 k 의 값은?

- ① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{11}{12}$ ④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ 을 이용하여 주어진 수를 변형하고 지수법칙으로 계산한다.

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt[4]{8}} = (2^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}$$

$$= (2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{12}}$$

$$2^{\frac{5}{12}} = (2^{\frac{1}{2}})^k \text{ 이므로 } \frac{5}{12} = \frac{1}{2}k$$

$$\therefore k = \frac{5}{6}$$

23. $a = 4^3$ 일 때, 8^9 을 a 에 관한 식으로 나타내면?

① a^2

② $a^{\frac{5}{2}}$

③ a^3

④ $a^{\frac{7}{2}}$

⑤ $a^{\frac{9}{2}}$

해설

$$\begin{aligned} a &= 4^3 = (2^2)^3 = 2^6 \quad \therefore 2 = a^{\frac{1}{6}} \\ 8^9 &= (2^3)^9 = 2^{27} = (a^{\frac{1}{6}})^{27} = a^{\frac{27}{6}} = a^{\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

24. $\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8} &= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{2\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{\log_3 64} \\ &= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 64 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^6 = 12\end{aligned}$$

25. $\frac{1}{2} \log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt{7} = a$, $\log_3 4 \cdot \log_4 \sqrt{3} = b$ 일 때, $a + 2b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

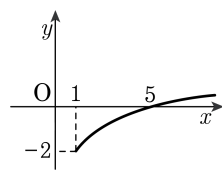
해설

$$a = \log_3 \frac{3}{\sqrt{7}} + \log_3 \sqrt{7} = \log_3 3 = 1$$

$$b = \log_3 4 \cdot \log_4 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 1 + 1 = 2$$

26. 다음 그림은 무리함수 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프를 그린 것이다. 이 때, 상수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c$ 의 값은?



- ① 1 ② -1 ③ 2
 ④ -2 ⑤ 3

해설

$y = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} + c$ 의 그래프를 보면

점(1, -2)에서부터 시작하므로

$$-\frac{b}{a} = 1, c = -2$$

$$\therefore -b = a, c = -2$$

$y = \sqrt{ax-a} - 2$ 가 점(5, 0)을 지나므로

$$0 = \sqrt{5a-a} - 2, 2 = \sqrt{4a}$$

양변을 제곱하면 $4 = 4a$

$$\therefore a = 1$$

따라서 $a = 1, b = -1, c = -2$ 이므로

$$a + b + c = 1 - 1 - 2 = -2$$

27. 무리함수 $y = \sqrt{x-a} + 1$ 에 대하여 $f^{-1}(2) = 3$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f(3) = 2$$

$$\therefore 2 = \sqrt{3-a} + 1$$

$$\therefore a = 2$$

28. 등차수열 $-3, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, 21$ 에 대하여 $x_4 + x_5$ 의 값은?

① 15

② 17

③ 19

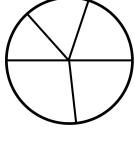
④ 21

⑤ 23

해설

주어진 등차수열의 공차를 d 라고 하면 21은 제 9항이므로
 $21 = -3 + 8d \quad \therefore d = 3$
따라서, 주어진 수열은 첫째항이 -3 , 공차가 3인 등차수열이고,
 x_4, x_5 은 각각 제 5항, 제 6항이므로
 $x_4 = -3 + (5 - 1) \cdot 3 = 9$
 $x_5 = -3 + (6 - 1) \cdot 3 = 12$
따라서 $x_4 + x_5$ 은 21이다.

29. 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 15인 원을 5개의 부채꼴로 나누었더니 부채꼴의 넓이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루었다. 가장 큰 부채꼴의 넓이가 가장 작은 부채꼴의 넓이의 2배일 때, 가장 큰 부채꼴의 넓이는 $k\pi$ 이다. 이때 k 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

각 부채꼴의 넓이를
 $a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$ 라 하면
 $2(a - 2d) = a + 2d$
 $2a - 4d = a + 2d$
 $a = 6d$
 $\therefore 4d, 5d, 6d, 7d, 8d$
그런데 $\frac{5(4d + 8d)}{2} = 15^2\pi$
 $6d = 45\pi$
 $d = \frac{15}{2}\pi$
 $\therefore 8d = 8 \cdot \frac{15}{2}\pi = 60\pi$
 $\therefore k = 60$

30. 9와 144 사이에 세 자연수를 넣어서 이들 5개의 수가 등비수열을 이루도록 할 때, 사이에 들어갈 세 수 중 가장 큰 수는?

① 36 ② 45 ③ 54 ④ 63 ⑤ 72

해설

첫째항을 9, 공비를 r 이라 하면 사이에 들어갈 세 자연수를 각각 $9r$, $9r^2$, $9r^3$ 으로 놓을 수 있다.

이때, $9r^4 = 144$ 이므로 $r^4 = 16$

$$r^4 - 16 = 0, (r^2 + 4)(r^2 - 2) = 0$$

그런데 세 수는 자연수이므로 $r = 2$

따라서 세 수는 18, 36, 72이고, 이 중 가장 큰 수는 72이다.

31. 서로 다른 세 수 a, b, c 가 이 순서로 등차수열을 이루고, b, a, c 가 등비수열을 이룰 때, $3a + 2b + c$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

b 는 a 와 c 의 등차중항이므로
 $2b = a + c \cdots \textcircled{㉠}$
 a 는 b 와 c 의 등비중항이므로
 $a^2 = bc \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$ 에서 $c = 2b - a$ 이므로 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면
 $a^2 = b(2b - a), a^2 + ab - 2b^2 = 0$
 $(a + 2b)(a - b) = 0$
따라서 $a = -2b$ 또는 $a = b$
그런데, a, b 는 서로 다른 수 이므로 $a = -2b$
 $c = 2b - a = 2b - (-2b) = 4b$
따라서 $3a + 2b + c = -6b + 2b + 4b = 0$

32. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 2n + 4$ 로 나타내어지는 수열에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?
- ① 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열이다.
 - ② 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열이다.
 - ③ 첫째항이 3, 공차가 -2인 등차수열이다.
 - ④ 첫째항이 3, 둘째항이 1이며, 둘째항부터는 공차가 2인 등차수열이다.
 - ⑤ 첫째항이 3, 둘째항이 1이며, 둘째항부터는 공차가 -2인 등차수열이다.

해설

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 2n + 4 - \{(n-1)^2 - 2(n-1) + 4\} \\ &= 2n - 3 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

그런데 $a_1 = S_1 = 3$ 이므로 이 수열의 첫째항은 3이고, 둘째항은 1이며, 둘째항부터는 공차가 2인 등차수열이다.

33. $\sum_{k=1}^n a_k = 2n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 (2k+1)a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 4n - 3(n=2, 3, 4, \dots) \\ n=1 \text{ 일 때, } a_1 &= 2 \cdot 1^2 - 1 = 1 \\ \text{따라서 } a_n &= 4n - 3(n=1, 2, 3, \dots) \text{ 이므로} \\ \sum_{k=1}^5 (2k+2)a_k &= \sum_{k=1}^5 (2k+1)(4k-3) \\ &= \sum_{k=1}^5 (8k^2 - 2k - 3) \\ &= 8 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5 \\ &= 440 - 30 - 15 = 395 \end{aligned}$$

34. 다음 수열의 합을 구하여라.

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8194

해설

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9 \cdots \textcircled{1}$$
$$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + 8 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^{10} \cdots \textcircled{2}$$
이므로 $\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면
$$\begin{aligned} -S &= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 2 - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 18 \cdot 2^9 - 2 \\ &= -16 \cdot 2^9 - 2 \end{aligned}$$
$$\therefore S = 2^{13} + 2 = 1024 \times 8 + 2 = 8194$$

35. $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_9 의 값은?

① 32

② 64

③ 128

④ 256

⑤ 512

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\therefore a_9 = 2^{9-1} = 2^8 = 256$$

36. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$, $a_n + a_{n+1} = 3n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 으로 정의된다. 이때, 두 수 $P = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{19}$, $Q = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots + a_{20}$ 에 대하여 $P - Q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = 2, a_1 + a_2 = 3 \therefore a_2 = 1$$

$$n = 2 \text{ 일 때, } a_2 + a_3 = 6 \therefore a_3 = 5$$

$$n = 3 \text{ 일 때, } a_3 + a_4 = 9 \therefore a_4 = 4$$

$$\therefore a_{2n-1} - a_{2n} = 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\therefore P - Q = \sum_{k=1}^{10} (a_{2k-1} - a_{2k}) = 10$$

37. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 이 성립하고 $a_1 = 1$ 일 때, $a_{10} + 1$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1024

해설

$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$ 에서 $a_{n+1} = 2a_n - \alpha$ 이므로 $\alpha = -1$

$\therefore a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

수열 $\{a_n + 1\}$ 은 첫째항이 $a_1 + 1 = 2$ 이고 공비 2인 등비수열이다.

$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ 이므로

$a_{10} + 1 = 2^{10}$

38. $a_1 = 3, a_2 = \frac{3}{7}, \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n < \frac{1}{50}$ 을 만족하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$ 이므로 수열 $\frac{1}{a_n}$ 은 등차수열을 이룬다. 등차

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 공차를 d 라 하면 $d = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항 $\frac{1}{a_n}$ 은

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot 2 = \frac{6n-5}{3}$$

$$\therefore a_n = \frac{3}{6n-5}$$

$$\frac{3}{6n-5} < \frac{1}{50} \text{에서 } n \geq 25, \dots$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 26이다.

39. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때,
(좌변) $= \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$, (우변) $= \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$
이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$
양변에 $\boxed{(가)}$ 를 더하면
 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} + \boxed{(가)}$
 $= \frac{k}{2k+1} + \boxed{(가)}$
 $= \boxed{(나)}$
따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① (가) : $\frac{1}{(k+1)(k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+1}$
- ② (가) : $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, (나) : $\frac{k+2}{2k+1}$
- ③ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k}{2k+3}$
- ④ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$
- ⑤ (가) : $\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

해설

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$
양변에 $\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$ 를 더하면
 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} + \boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$
 $= \frac{k}{2k+1} + \boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$
 $= \boxed{\frac{k+1}{2k+3}}$
따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

40. $\log_{10}(1+1) + \log_{10}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_{10}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_{10}\left(1 + \frac{1}{99}\right)$
의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \log_{10} 2 + \log_{10} \frac{3}{2} + \log_{10} \frac{4}{3} + \cdots + \log_{10} \frac{100}{99} \\&= \log_{10} \left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{100}{99} \right) \\&= \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10 = 2\end{aligned}$$

41. $\log_2 \sqrt{7 + \sqrt{24}}$ 의 소수 부분을 x 라 할때, 2^{x+1} 의 값을 구하면?

- ① $\sqrt{3} + 1$ ② $\sqrt{5} + 1$ ③ $\sqrt{6} + 1$
④ $\sqrt{7} + 1$ ⑤ $2\sqrt{2} + 1$

해설

$$\begin{aligned} & \log_2 \sqrt{7 + \sqrt{24}} \\ &= \log_2 \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} \\ &= \log_2 (\sqrt{6} + 1) \\ &= \log_2 (3 \times \times \times) \\ &= 1. \times \times \times \\ & \text{따라서, } x = \log_2 (\sqrt{6} + 1) - 1 \\ & 2^{x+1} = 2^{\log_2 (\sqrt{6} + 1)} = \sqrt{6} + 1 \end{aligned}$$

42. $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ 일 때, 3^4 는 몇 자리 정수인가?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\log 3^4 = 4 \log 3$
 $= 4 \times 0.4771 = 1.9084$
따라서 $\log 3^4$ 의 지표는 1 이므로 3^4 은 2자리 정수이다.

43. 두 곡선 $y = \sqrt{x+1} + 1$, $x = \sqrt{y+1} + 1$ 의 교점을 P라고 할 때, 선분 OP의 길이를 구하면? (단, O는 원점)

① $3\sqrt{2}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ $9\sqrt{2}$ ④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $9\sqrt{3}$

해설

두 함수가 서로 역함수 관계이므로 곡선의 교점은 $y = \sqrt{x+1} + 1$ 와 $y = x$ 의 교점과 같다.

$$\sqrt{x+1} + 1 = x \text{에서}$$

$$x + 1 = (x - 1)^2$$

$$x = 0, 3$$

$$x \geq 1 \text{이므로 } x = 3$$

$$\therefore P(3, 3)$$

$$OP = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

44. 한 은행은 고객으로부터 100만원을 연이율 5%의 5년 만기 정기예금으로 받으면 그 중에서 90만원을 연이율 $r\%$ 로 5년 동안 대출하고 나머지 10만원은 예비비로 보관한다. 5년 후 은행은 대출금을 이자와 함께 회수하고 고객에게 정기예금을 이자와 함께 지불하여 20만원의 수익을 얻으려고 한다. 이때, 대출 이율 r 을 구하는 식은? (단, 모든 이자는 1년마다의 복리로 계산한다.)

- ① $10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 - 9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 10^5$
 ② $10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 - 9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 2 \times 10^5$
 ③ $10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 - 9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 3 \times 10^5$
 ④ $9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 - 10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 = 10^5$
 ⑤ $9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 - 10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^6 = 2 \times 10^5$

해설

연이율 5%의 5년 만기 정기예금 100만원에 대한 5년 후의 원리함계는 $10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5$

대출 이율이 $r\%$ 인 대출금 90만원에 대한 5년 후의 원리함계는 $9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5$

이 은행은 100만원의 정기예금에서 90만원을 대출하고 10만원의 예비비를 보관하고 있으므로 5년 후 20만원의 수익을 얻으려면 정기예금의 원리함계와 대출금의 원리함계의 차가 10만원이면 된다.

$$\therefore 9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 - 10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 = 10^5$$

45. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 4x - (2n-1)(2n+1) = 0$ 의 두근 α_n, β_n 에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right)$ 의 값은?

- ① $\frac{11}{21}$ ② $\frac{20}{21}$ ③ $\frac{31}{21}$ ④ $\frac{40}{21}$ ⑤ $\frac{50}{21}$

해설

$$\begin{aligned} \alpha_n + \beta_n &= -4 \\ \alpha_n \beta_n &= -(2n-1)(2n+1) \\ \frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} &= \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = \frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)} \\ \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\beta_k} \right) &= \sum_{k=1}^{10} \frac{\alpha_k + \beta_k}{\alpha_k \beta_k} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{4}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= 4 \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{4}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{40}{21} \end{aligned}$$

46. 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 할 때, $b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_{20}$ 과 같은 것은?

① $a_{20} - a_{19}$

② $a_{20} - a_2$

③ $a_{21} - a_{20}$

④ $a_{21} - a_2$

⑤ $a_{21} - a_1$

해설

$b_n = a_{n+1} - a_n$ 이므로

$$b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_{20}$$

$$= (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{21} - a_{20})$$

$$= -a_2 + a_{21} = a_{21} - a_2$$

47. $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ 일 때, $\left(\frac{5}{6}\right)^{100}$ 은 소숫점 아래 몇째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는가?

① 10

② 8

③ 5

④ 21

⑤ 53

해설

$$\log \left(\frac{5}{6}\right)^{100} = 100 \log \frac{5}{6} = 100(\log 5 - \log 6)$$

$$= 100(1 - \log 2 - \log 2 - \log 3)$$

$$= 100(1 - 2 \log 2 - \log 3)$$

$$= 100(1 - 2 \times 0.3010 - 0.4771)$$

$$= -7.91 = -8 + 0.09$$

지표 = 8이므로 소수점 아래 8번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

48. $2^{20} \cdot 3^{30}$ 의 맨 첫 자리의 수를 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned} & \log (2^{20} \cdot 3^{30}) \\ &= 20 \times \log 2 + 30 \times \log 3 \\ &= 20.333 \\ &20.3010 < 20.333 < 20.4771 \\ &\log (10^{20} \times 2) < \log (2^{20} \cdot 3^{30}) < \log (10^{20} \times 3) \\ &2 \times 10^{20} < 2^{20} \cdot 3^{30} < 3 \times 10^{20} \\ &\text{이므로 첫 자리의 수는 } 2 \end{aligned}$$

49. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $\log_3(S_n + 3) = n + 1$ 이 성립한다고 한다. 이때, 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $a_4 = 54$

㉡ $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2} (n = 1, 2, 3, \dots)$

㉢ 수열 $\{S_n + 3\}$ 은 첫째항이 6이고 공비가 3인 등비수열이다.

① ㉢

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$\log_3(S_n + 3) = n + 1$ 에서

$$S_n = 3 \cdot 3^n - 3, S_{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} - 3$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 6 \cdot 3^{n-1} (n \geq 2)$$

$$a_1 = S_1 = 6 \text{ 이므로}$$

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 6이고,

공비가 3인 등비수열이다.

$\therefore$ ㉢은 참

$$a_4 = 6 \cdot 3^{4-1} = 6 \cdot 27 = 162$$

$\therefore$ ㉠은 거짓

$$a_{n+1}^2 = (6 \cdot 3^n)^2 = 6^2 \cdot 3^{2n}$$

$$a_n \cdot a_{n+2} = 6 \cdot 3^{n-1} \cdot 6 \cdot 3^{n+1} = 6^2 \cdot 3^{2n}$$

$\therefore$ ㉡은 참

50. 어느 도시의 방역 당국은 전염병 S 에 걸린 닭을 완전히 격리한 다음, 이 닭을 대상으로 전염병 치료제를 투여하기 시작하였다. 그 결과 전염병 S 에 걸려 격리된 닭의 수가 전날에 비해 매일 16%씩 감소했다. 처음에 전염병 S 에 걸려 격리된 닭이 a 마리였을 때, n 일 후에는 처음에 격리된 닭의 수의 5%이하가 된다. 이때, 자연수 n 의 값은? (단, $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771, \log 7 = 0.8451$ 이다.)

- ① 14
- ② 16
- ③ 18
- ④ 20
- ⑤ 22

해설

전염병 S 에 걸려 격리된 닭의 수가 전날에 비해 매일 16%씩 감소하여 n 일 후에 처음으로 닭의 수가 최초 전염병 S 에 걸려 격리된 닭의 수의 5%이하가 되므로

$$a(1 - 0.16)^n \leq 0.05a$$
$$0.84^n \leq \log 0.05$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 0.84^n \leq \log 0.05$$
$$n \log \frac{84}{100} \leq \log \frac{5}{100}$$
$$n(-2 + 2 \log 2 + \log 3 + \log 7) \leq -2 + (1 - \log 2)$$
$$n(-2 + 2 \times 0.3010 + 0.4771 + 0.8451) \leq -2 + 1 - 0.3010$$
$$-0.0758n \leq -1.301$$
$$n \geq \frac{1.301}{0.0758} = 17.1 \times \times \times$$

$\therefore n = 18$