

1. $2a + 3b = 12$ 를 만족하는 양수 a, b 에 대하여 ab 의 최댓값을 구하면?

① 12

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 4

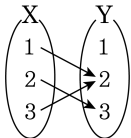
해설

$$12 = 2a + 3b \geq 2\sqrt{6ab}$$

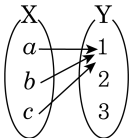
$$6 \geq \sqrt{6ab}, \quad 36 \geq 6ab \quad \therefore 6 \geq ab$$

2. 다음 대응 중 X 에서 Y 로의 함수가 아닌 것을 모두 고르면?

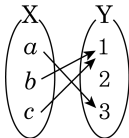
①



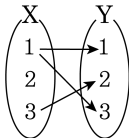
②



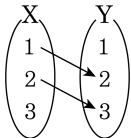
③



④



⑤



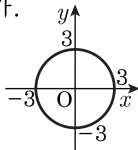
해설

④ X 의 원소 1에 대응되는 Y 의 원소는 2개이고 X 의 원소 2에 대응하는 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

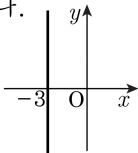
⑤ X 의 원소 3에 대응되는 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

3. 다음 중 함수의 그래프인 것을 모두 고른 것은?

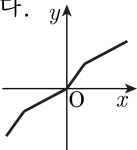
가.



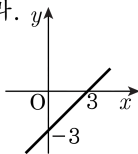
나.



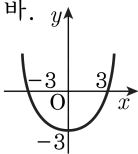
다.



라.



마.



① 가, 나, 다

② 가, 나, 마

③ 다, 라, 마

④ 나, 마

⑤ 가, 마

해설

주어진 x 에 y 값이 하나만 대응되어야 한다.

$\therefore$ 다, 라, 마 가 함수이다.

4. 실수 전체의 집합을 정의역과 공역으로 하는 함수 f 가 $f(x) = \begin{cases} x & (x \text{는 유리수}) \\ 1-x & (x \text{는 무리수}) \end{cases}$ 과 같을 때 $f(\sqrt{2}) + f(1 - \sqrt{2})$ 의 값은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \text{와 } 1 - \sqrt{2} \text{는 모두 무리수이므로,} \\ & f(\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2} \\ & f(1 - \sqrt{2}) = 1 - (1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} \\ & \therefore f(\sqrt{2}) + f(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 1 \end{aligned}$$

5. 집합 $X = \{x | x \text{는 자연수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 는 상수 함수이다. $f(2) = 2$ 일 때, $f(1) + f(3) + f(5) + \cdots + f(19)$ 의 값은 얼마인가?

① 100

② 50

③ 38

④ 20

⑤ 10

해설

$f(x)$ 가 상수함수이므로,

$$f(1) = f(3) = \cdots = f(19) = 2$$

$$\therefore f(1) + f(3) + \cdots + f(19) = 2 \cdot 10 = 20$$

6. 두 양수 a, b 에 대하여 다음 설명 중 틀린 것은?

① a, b 의 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$ 이다.

② $\sqrt{ab}$ 는 a, b 의 기하평균이다.

③ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 은 절대부등식이다.

④ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ 이면 반드시 $b = \frac{1}{a}$ 이다.

⑤ $a + \frac{1}{a} \geq 2$ 는 항상 성립한다.

해설

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \dots \text{절대부등식}$$

$$\frac{a+b}{2}: \text{산술평균}, \sqrt{ab}: \text{기하평균}$$

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$ 일 때 성립한다.

7. $x > 3$ 일 때 $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x$ 의 최솟값은?

① 3

② 5

③ 12

④ 15

⑤ 17

해설

$$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

이 때, $x > 3$ 이므로 $3(x-3) > 0$, $\frac{3}{x-3} > 0$

산술평균과 기하평균에 의해

$$\begin{aligned} & 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11 \\ & \geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11 \\ & = 2 \cdot 3 + 11 = 17 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $3(x-3) = \frac{3}{x-3}$, 즉 $x = 4$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

8. 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 일 때 $x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z$ 의 최댓값 M 과 최솟값 m 은?

① $M = 3, m = 0$

② $M = 3, m = -3$

③ $M = 6, m = 0$

④ $M = 6, m = -6$

⑤ $M = 6, m = -12$

해설

x, y, z 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\{1 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\} (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$$

$$36 \geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$$

$$-6 \leq x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z \leq 6$$

$$\therefore M = 6, m = -6$$

9. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합 X 의 개수는 몇 개인가?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로

$$2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10 \text{에서}$$

$$3x^2 - 12x - 15 = 0, 3(x^2 - 4x - 5) = 0$$

$$(x - 5)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 5, -1$$

즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$ 일 때 $f(x) = g(x)$ 이다.

$$\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$$

10. 다음 함수 중 좌표평면에서 그 그래프가 임의의 직선과 항상 만나는 것은 무엇인가?

① $y = |x|$

② $y = x^2$

③ $y = \sqrt{x}$

④ $y = x^3$

⑤ $y = \frac{1}{x}$

해설

각 함수의 그래프를 그려보거나,
정의역, 치역 관계를 조사해 보면 쉽게 알 수 있다.
 x, y 전체 실수 구간에서 그래프가
그려지는 함수는 $y = x^3$ 뿐이다.

11. 자연수의 집합을 N , 양의 유리수 집합을 Q^+ 라고 할 때, 함수 f 가 $f : Q^+ \rightarrow N \times N$ 으로 정의될 때, 다음 중 일대일 대응인 것은? (단, p, q 는 서로소)

① $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, 0)$

② $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0, q)$

③ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p+q, 0)$

④ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0, pq)$

⑤ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, q)$

해설

① $\frac{2}{3} \neq \frac{2}{5}$ 일 때

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{5}\right) = (2, 0)$$

②, ③, ④도 같은 방법으로
일대일 대응이 아님을 보일 수 있다.

12. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$ 가 있다. X 에서 Y 로의 일대일 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 24 개

해설

a 에 대응하는 수가 b 에 대응해서는 안 되고
 a, b 에 대응하는 수가 c 에 대응해서는 안 되므로
 $\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24(\text{개})$

13. $a + b = 9$ 를 만족하는 양수 a, b 에 대하여 $[ab]$ 의 최댓값을 구하여라.
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지않는 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

산술기하평균의 관계를 이용하면 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$$ab \leq \left(\frac{9}{2}\right)^2, ab \leq 20.25$$

$\therefore [ab]$ 의 최댓값은 20

14. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

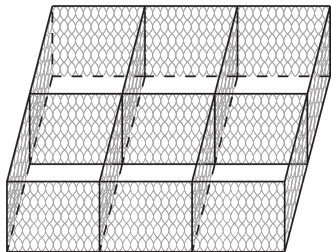
해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$$

15. 동원이가 길이 152m 인 철망을 가지고 다음 그림과 같이 여섯 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이가 최대가 될 때, 전체 직사각형의 가로 길이는?



- ① 19 ② $\frac{68}{3}$ ③ $\frac{70}{3}$ ④ 24 ⑤ $\frac{76}{3}$

해설

가로의 길이를 x , 세로의 길이를 y 라 하면

$$152 = 3x + 4y \geq 2\sqrt{12xy} \text{ 이고}$$

등호가 성립할 때, xy 가 최대가 된다.

$3x = 4y$ 일 때, 등호가 성립하므로

$$6x = 152$$

즉, $x = \frac{76}{3}$ 일 때, 전체 우리의 넓이가 최대가 된다.

16. 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족할 때, $x + 2y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$$(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 2y)^2$$

$x^2 + y^2 = 5$ 이므로

$$25 \geq (x + 2y)^2$$

$$\therefore -5 \leq x + 2y \leq 5$$

$$\therefore M = 5, m = -5$$

$$\therefore M - m = 5 - (-5) = 10$$

17. 두 실수 x, y 의 제곱의 합이 10일 때, $x + 3y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$$

$$x^2 + y^2 = 10 \text{ 이므로 } 100 \geq (x + 3y)^2$$

$$\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$$

$$\therefore M = 10, m = -10$$

$$\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$$

18. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & (x \text{가 유리수}) \\ 2x & (x \text{가 무리수}) \end{cases} \text{ 일 때,}$$

$f(x) - f(x-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

(i) x 가 유리수일 때, $x-1$ 도 유리수이므로

$$\begin{aligned} f(x) - f(x-1) &= 2x - 1 - \{2(x-1) - 1\} \\ &= 2x - 1 - (2x - 3) = 2 \end{aligned}$$

(ii) x 가 무리수일 때, $x-1$ 도 무리수이므로

$$f(x) - f(x-1) = 2x - 2(x-1) = 2$$

따라서 (i), (ii)에서 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) - f(x-1) = 2$$

19. 두 집합 $X = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 집합 X 에서 Y 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의할 때, 이 함수의 치역을 구하면?

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 1 & (x < 0) \\ x & (x = 0) \\ \frac{x^2}{4} & (x > 0) \end{cases}$$

① $\{0, 1, 2\}$

② $\{0, 1, 3\}$

③ $\{0, 1, 2, 3\}$

④ $\{0, 1, 2, 4\}$

⑤ $\{0, 1, 3, 4\}$

해설

$$f(-4) = |-4| - 1 = 3$$

$$f(-2) = |-2| - 1 = 1$$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = \frac{4}{4} = 1$$

$$f(4) = \frac{16}{4} = 4$$

$\therefore$ 치역 : $\{0, 1, 3, 4\}$

20. 자연수의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(1) = 1$ 이고 $f(x+1) = f(x) + 4\sqrt{f(x)} + 4$ 가 성립할 때, $f(6)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 121

해설

$$f(x+1) = f(x) + 4\sqrt{f(x)} + 4 = (\sqrt{f(x)} + 2)^2$$

$$f(1) = 1, f(2) = 3^2, f(3) = 5^2,$$

$$f(4) = 7^2, f(5) = 9^2, f(6) = 11^2 = 121$$

21. 함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 이고 $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

임의의 실수 x, y 에 대하여

$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 가 성립하므로,

$x = 1, y = 0$ 을 대입하면

$$f(1)f(0) = f(1) + f(1)$$

$$\therefore f(0) = f(1) + f(1) = 2$$

22. 함수 $f : A \rightarrow B$ 에서 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 이고,
 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 일 때, $\{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 +$
 $\{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 이므로

$B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 에서 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ 을 사용하여 $1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 을 만들 수 있는 경우는 더하는 순서에 상관없이 $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}$ 으로 표현된다.

이 때, 정의역 중에서 $1, \sqrt{2}$ 에 대응하는 것은 1개이고 $\sqrt{3}$ 에 대응하는 것은 2개이어야 한다.

$$\begin{aligned} & \text{따라서 } \{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 + \{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2 \\ &= 1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 9 \end{aligned}$$

23. 집합 $X = \{0, 1, 2\}$ 에서 세 함수 f, g, h 는 각각 X 에서 X 로의 일대일 대응, 상수함수, 항등함수이고, 다음 두 조건을 만족시킨다.

$$\neg. f(0) = g(1) = h(2)$$

$$\neg. 2f(1) + f(2) = f(0)$$

이때, $f(2) + g(2) + h(2)$ 의 값은 얼마인가?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$h(x)$ 가 항등함수이므로 $h(2) = 2$

조건 $\neg$ 에 의해, $f(0) = g(1) = h(2) = 2$

$g(x)$ 는 상수함수이므로 $g(0) = g(1) = g(2) = 2$

$f(x)$ 는 일대일 대응이고 $f(0) = 2$ 이므로

$f(1) = 0, f(2) = 1$ 또는 $f(1) = 1, f(2) = 0$

(i) $f(1) = 0, f(2) = 1$ 일 때

$$2f(1) + f(2) = 1 \neq 2 = f(0)$$

(ii) $f(1) = 1, f(2) = 0$ 일 때

$$2f(1) + f(2) = 2 = f(0)$$

(i), (ii) 에 의해

조건 $\neg$ 을 만족하는 것은

$f(1) = 1, f(2) = 0$ 일 때이다.

$$\therefore f(2) + g(2) + h(2) = 0 + 2 + 2 = 4$$

24. 집합 $X = \{-2, 0, 2\}$, $Y = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ 가 있다. X 에서 Y 로의 함수 $f : X \rightarrow Y$ 중에서 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 개수는?

① 2 가지

② 3 가지

③ 4 가지

④ 5 가지

⑤ 6 가지

해설

$f(0) = -f(0)$ 에서 $f(0) = 0$ 이고,

1) $f(-2) = -3, f(2) = 3$

2) $f(-2) = -1, f(2) = 1$

3) $f(-2) = 0, f(2) = 0$

4) $f(-2) = 1, f(2) = -1$

5) $f(-2) = 3, f(2) = -3$

따라서 5 가지이다.

25. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 211 개

해설

$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 이들 중 적어도 하나는 0 이므로, 전체 함수의 개수에서 $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인 함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$