

1. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt[3]{-64} = -4$

② $\sqrt[4]{81} = 3$

③ $\sqrt[4]{-32} = -2$

④ $-\sqrt[3]{0.008} = -0.2$

⑤ $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) = 1$

해설

⑤ $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2})$
 $= \sqrt[3]{3^3} + \sqrt[3]{2^3} = 5$

2. 16의 네제곱근 중 음수인 것을 a , -27 의 세제곱근 중 실수인 것을 b 라 할 때, ab 의 값은?

① -12

② -6

③ 6

④ 12

⑤ 36

해설

16의 네제곱근 중 음수인 것은

$$-\sqrt[4]{16} = -2 \quad \therefore a = -2$$

-27 의 세제곱근을 x 라 하면

$$x^3 = -27, \quad (x+3)(x^2-3x+9) = 0$$

이때, -27 의 세제곱근 중 실수인 것은 -3 이다.

$$\therefore b = -3$$

$$\therefore ab = (-2) \times (-3) = 6$$

3. $a = 4^3$ 일 때, 8^9 을 a 에 관한 식으로 나타내면?

① a^2

② $a^{\frac{5}{2}}$

③ a^3

④ $a^{\frac{7}{2}}$

⑤ $a^{\frac{9}{2}}$

해설

$$\begin{aligned} a &= 4^3 = (2^2)^3 = 2^6 \quad \therefore 2 = a^{\frac{1}{6}} \\ 8^9 &= (2^3)^9 = 2^{27} = (a^{\frac{1}{6}})^{27} = a^{\frac{27}{6}} = a^{\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

4. 거듭제곱에 대한 설명 중 옳은 것은?

- ① $\sqrt[4]{81} = \pm 3$
- ② $\sqrt[3]{-64} = -8$
- ③ 16의 네제곱근은 ± 2 이다.
- ④ $\sqrt{(-3)^2}$ 의 제곱근은 3이다.
- ⑤ -1은 -1의 세제곱근 중 하나이다.

해설

- ① $\sqrt[4]{81} = \sqrt{9} = 3 \quad \therefore$ 거짓
- ② $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4 \quad \therefore$ 거짓
- ③ 16의 네제곱근은 $\pm 2, \pm 2i$ 이다. $\therefore$ 거짓
- ④ $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ 의 제곱근은 $\pm \sqrt{3}$ 이다. $\therefore$ 거짓
- ⑤ $(-1)^3 = -1$ 이므로 -1은 -1의 세제곱근 중 하나이다. $\therefore$ 참

5. $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})$ 의 값은?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{3} = a, \sqrt[3]{2} = b \text{라고 하면} \\ &(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ &= a^3 + b^3 \\ &= 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

6. $a > 0$ 이고 m, n, p 가 2 이상의 정수일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

② $\sqrt[p]{a^{mp}} = \sqrt{a^m}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[n]{a})^n = \sqrt{a^{mn}}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}}$

⑤ $\frac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = a^{-\frac{n}{m}}$

해설

$$(\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[n]{a})^n = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{n}{n}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{n}{n}} = a^{\frac{m^2+n^2}{nn}}$$

7. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{a}}$ 을 간단히 하면?

- ① $\sqrt[8]{\frac{b^3}{a^3}}$ ② $\sqrt[8]{\frac{a^3}{b^3}}$ ③ $\sqrt[8]{\frac{b^3}{a^5}}$ ④ $\sqrt[8]{\frac{b^5}{a^3}}$ ⑤ $\sqrt[8]{\frac{a^5}{b^3}}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{a}} \\ &= \sqrt{\frac{b}{a}} \times \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[8]{\frac{b}{a}} \\ &= \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}} \times \frac{b^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{1}{8}}} \\ &= a^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}} \times b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}} = a^{-\frac{3}{8}} \times b^{\frac{3}{8}} \\ &= \frac{b^{\frac{3}{8}}}{a^{\frac{3}{8}}} = \frac{\sqrt[8]{b^3}}{\sqrt[8]{a^3}} = \sqrt[8]{\frac{b^3}{a^3}} \end{aligned}$$

8. 세 수 $A = 2^{\frac{1}{2}}, B = 3^{\frac{1}{3}}, C = 9^{\frac{1}{9}}$ 의 대소 관계는?

- ① $A < B < C$ ② $B < A < C$ ③ $B < C < A$
④ $C < B < A$ ⑤ $C < A < B$

해설

$A = 2^{\frac{1}{2}}$ 이면 $A^{18} = (2^{\frac{1}{2}})^{18} = 2^9 = 512$
 $B = 3^{\frac{1}{3}}$ 이면 $B^{18} = (3^{\frac{1}{3}})^{18} = 3^6 = 729$
 $C = 9^{\frac{1}{9}}$ 이면 $C^{18} = (9^{\frac{1}{9}})^{18} = 9^2 = 81$
 $C^{18} < A^{18} < B^{18}$ 이므로
 $\therefore C < A < B$

9. 세 수 $A = \sqrt[3]{5\sqrt{2}}$, $B = \sqrt{2\sqrt[3]{5}}$, $C = \sqrt[12]{1024}$ 의 대소관계를 바르게 나타낸것은?

- ① $A < B < C$
- ② $A < C < B$
- ③ $B < A < C$
- ④ $B < C < A$
- ⑤ $C < B < A$

해설

거듭제곱근의 성질을 이용하여 $\sqrt[n]{N}$ 꼴로 통일한다.

$A = \sqrt[3]{5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{50}} = \sqrt[6]{50}$

$B = \sqrt{2\sqrt[3]{5}} = \sqrt{\sqrt[3]{40}} = \sqrt[6]{40}$

$C = \sqrt[12]{1024} = \sqrt[12]{2^{10}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$ 이므로

$\sqrt[6]{32} < \sqrt[6]{40} < \sqrt[6]{50}$ 이므로

$\therefore C < B < A$

10. $P = \frac{9^3 \cdot 81^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}{27^{-6} \cdot 9^2}$ 에 대하여 $\sqrt[4]{P}$ 의 값은?

- ① $3\sqrt{9}$ ② $9\sqrt[4]{3}$ ③ $9\sqrt[4]{9}$ ④ $9\sqrt[4]{27}$ ⑤ 81

해설

$$\begin{aligned} P &= \frac{9^3 \cdot 81^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}{27^{-6} \cdot 9^2} = \frac{(3^2)^3 \cdot (3^4)^{-3} \cdot 3^3}{(3^3)^{-6} \cdot (3^2)^2} \\ &= \frac{3^6 \cdot 3^{-12} \cdot 3^3}{3^{-18} \cdot 3^4} \\ &= \frac{3^{-3}}{3^{-14}} \\ &= 3^{-3-(-14)} = 3^{11} \\ \therefore \sqrt[4]{P} &= \sqrt[4]{3^{11}} = 9\sqrt[4]{3^3} = 9\sqrt[4]{27} \end{aligned}$$

11. $10^{0.31} = 2$, $10^{1.04} = 11$ 로 계산할 때, $10^a = 275$ 를 만족하는 a 의 값은?

① 2.34

② 2.38

③ 2.42

④ 2.46

⑤ 2.50

해설

$$5 = \frac{10}{2} = \frac{10}{10^{0.31}} = 10^{1-0.31} = 10^{0.69} \text{ 이므로}$$

$$275 = 5^2 \times 11 = (10^{0.69})^2 \times 10^{1.04}$$

$$= 10^{1.38} \times 10^{1.04} = 10^{2.42}$$

$$\therefore a = 2.42$$

12. $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$ 일 때, $a - \frac{1}{a}$ 의 값은? (단, $a > 1$)

- ① $\frac{15}{4}$ ② 5 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 15 ⑤ 1

해설

곱셈 공식의 변형 $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$ 에 의하여

$$\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 - 4 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$$

$$\therefore a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} (\because a > 1)$$

$$\therefore a - \frac{1}{a} = \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right) \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$$

13. $2^x + \frac{1}{2^x} = 2$ 일 때, $8^x + \frac{1}{8^x}$ 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} 8^x + \frac{1}{8^x} &= (2^x)^3 + \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 \\ &= \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^3 - 3 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2^x} \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) \\ &= 2^3 - 3 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

14. $x = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때, $\sqrt{x^2 + 4}$ 의 값은?

① $\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

② $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

③ $\sqrt[4]{2} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

④ $\sqrt[4]{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

⑤ $\sqrt[8]{2} + \frac{1}{\sqrt[8]{2}}$

해설

$$x^2 + 4 = 2^{\frac{1}{4}} + 2 + 2^{-\frac{1}{4}} = \left(2^{\frac{1}{8}} + 2^{-\frac{1}{8}}\right)^2$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + 4} = 2^{\frac{1}{8}} + 2^{-\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{2} + \frac{1}{\sqrt[8]{2}}$$

15. $a^{2x} = \sqrt{2} - 1$ 일 때, $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 값은?

① $\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2}$

③ $\sqrt{2} - 1$

④ $2\sqrt{2} - 1$

⑤ $2\sqrt{2} - 2$

해설

$$a^{-2x} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

주어진 식의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면,

$$\frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} + 1} = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1) + 1}$$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 1$$

16. 실수 a, b 에 대하여 $2^a = 3$, $2^b = 45$ 일 때, 2^{2a-b} 의 값은?

- ① 5 ② 4 ③ 3 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$\begin{aligned} 2^{2a-b} &= 2^{2a} \cdot 2^{-b} = (2^a)^2 (2^b)^{-1} \\ &= 3^2 \times \frac{1}{45} \end{aligned}$$

17. 실수 x, y 에 대하여 $57^x = 27$, $513^y = 81$ 일 때, $\frac{3}{x} - \frac{4}{y}$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} 57^x &= 27 = 3^3 \text{에서 } 57 = (3^3)^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{3}{x}} \cdots \text{㉠} \\ 513^y &= 81 = 3^4 \text{에서 } 513 = (3^4)^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{4}{y}} \cdots \text{㉡} \\ \text{㉠} \div \text{㉡} \text{을 하면} \\ \frac{1}{9} &= 3^{\frac{3}{x}} \div 3^{\frac{4}{y}} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}} \\ 3^{-2} &= 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}} \\ \therefore \frac{3}{x} - \frac{4}{y} &= -2 \end{aligned}$$

18. 지진이 발생할 때, 지진의 세기를 진도라 하며 보통 리히터수로 나타낸다. 지질학자 C.F.Richer는 강도가 I 인 지진의 진도 R 을 다음과 같이 정의하였다.

$R = \log \frac{I}{I_0}$ (단, I_0 는 표준지진의 강도)

리히터수로 진도 6.8인 지진의 강도는 리히터 수로 진도 4.8인 지진의 강도의 몇배인가?

- ① 1.4배
- ② 2배
- ③ $\sqrt{10}$ 배
- ④ 10배
- ⑤ 100배

해설

진도가 4.8, 6.8일 때의 지진의 강도를 각각 I_1, I_2 라 하면

$4.8 = \log \frac{I_1}{I_0}, 6.8 = \log \frac{I_2}{I_0}$ 이므로

$\therefore \log \frac{I_2}{I_1} = \frac{10^{6.8}}{10^{4.8}} = 100(\text{배})$

19. 다음 세 수 $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[6]{6}$ 의 대소관계를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{2} > \sqrt[4]{5} > \sqrt[6]{6}$

② $\sqrt{2} > \sqrt[6]{6} > \sqrt[4]{5}$

③ $\sqrt[4]{5} > \sqrt{2} > \sqrt[6]{6}$

④ $\sqrt[4]{5} > \sqrt[6]{6} > \sqrt{2}$

⑤ $\sqrt[6]{6} > \sqrt[4]{5} > \sqrt{2}$

해설

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[6]{6} = 6^{\frac{1}{6}}$ 이므로 각 수를 12제곱 한다.

$$(\sqrt{2})^{12} = (2^{\frac{1}{2}})^{12} = 2^6 = 64$$

$$(\sqrt[4]{5})^{12} = (5^{\frac{1}{4}})^{12} = 5^3 = 125$$

$$(\sqrt[6]{6})^{12} = (6^{\frac{1}{6}})^{12} = 6^2 = 36$$

$125 > 64 > 36$ 이므로

$$\sqrt[4]{5} > \sqrt{2} > \sqrt[6]{6}$$

20. 양수 a 에 대하여 $a^{2x} = 5 + 2\sqrt{6}$ 이 성립할 때, $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} \\ &= \frac{(a^x + a^{-x}) \{ (a^x)^2 - a^x a^{-x} + (a^{-x})^2 \}}{a^x + a^{-x}} \\ &= a^{2x} + a^{-2x} - 1 \\ &= 5 + 2\sqrt{6} + \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}} - 1 \\ &= 5 + 2\sqrt{6} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})} - 1 \\ &= 5 + 2\sqrt{6} + 5 - 2\sqrt{6} - 1 = 9 \end{aligned}$$

21. $2^x = 3^y = 5^z$ 이 성립할 때, $5^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{x}{y}} + 3^{\frac{y}{z}}$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 5

④ 10

⑤ 20

해설

$2^x = 3^y = 5^z$ 에서

$2 = 5^{\frac{z}{x}}, 3 = 2^{\frac{x}{y}}, 5 = 3^{\frac{y}{z}}$

$\therefore 5^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{x}{y}} + 3^{\frac{y}{z}} = 2 + 3 + 5 = 10$

22. 실수 x 에 대하여 $a = 2^{\sec x}$, $b = 4^{\tan x}$ 라 하자. $a^{-\sin x} = 3$ 일 때, b 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} a &= 2^{\sec x} = 2^{\frac{1}{\cos x}} \text{ 이므로} \\ b &= 4^{\tan x} = 4^{\frac{\sin x}{\cos x}} = 2^{\frac{2\sin x}{\cos x}} = a^{2\sin x} \\ \therefore b &= (a^{\sin x})^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

23. $\sqrt{\frac{n}{2}}, \sqrt[3]{\frac{n}{3}}, \sqrt[5]{\frac{n}{5}}$ 이 자연수가 되게 하는 실수 n 의 최솟값을 $2^a3^b5^c$ 의 꼴로 나타낼 때, $a+b+c$ 의 값은?(단, a, b, c 는 자연수이다.)

- ① 19
- ② 23
- ③ 27
- ④ 31
- ⑤ 35

해설

$n = 2^a3^b5^c$ 에서
 $\sqrt{\frac{n}{2}}$ 이 자연수가 되려면 $a = 2k_1 + 1, b$ 와 c 는 2의 배수
 $\sqrt[3]{\frac{n}{3}}$ 이 자연수가 되려면 $b = 3k_2 + 1, a$ 와 c 는 3의 배수
 $\sqrt[5]{\frac{n}{5}}$ 이 자연수가 되려면 $c = 5k_3 + 1, a$ 와 b 는 5의 배수
(단, $k_1, k_2, k_3 = 0, 1, 2, \dots$)
 $\therefore a = 15, b = 10, c = 6$
 $\therefore a + b + c = 31$

24. $2^a + 2^{-a} = 3$, $2^b + 2^{-b} = 5$ 일 때, $(2^{a+b} + 2^{-(a+b)})(2^{a-b} + 2^{-(a-b)})$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$$\begin{aligned} & (2^{a+b} + 2^{-(a+b)})(2^{a-b} + 2^{-(a-b)}) \\ &= 2^{2a} + 2^{2b} + 2^{-2b} + 2^{-2a} \\ &= 2^{2a} + 2^{-2a} + 2^{2b} + 2^{-2b} \\ &= (2^a + 2^{-a})^2 - 2 + (2^b + 2^{-b}) - 2 \\ &= 3^2 - 2 + 5^2 - 2 = 30 \end{aligned}$$

25. a, b, c 가 서로 다른 실수일 때, 다음을 간단히 하면?

$$\left(3^{\frac{a}{a-b}}\right)^{\frac{a}{c-a}}\left(3^{\frac{b}{b-c}}\right)^{\frac{b}{a-b}}\left(3^{\frac{c}{c-a}}\right)^{\frac{c}{b-c}}$$

- ① 3
- ② 9
- ③ $\frac{1}{3}$
- ④ $\frac{1}{9}$
- ⑤ $\frac{1}{27}$

해설

지수를 따로 써보면

$$\frac{a^2}{(a-b)(c-a)} + \frac{b^2}{(b-c)(a-b)} + \frac{c^2}{(c-a)(a-c)}$$
$$\frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$= \frac{a^2b - a^2c + b^2c - ab^2 + ac^2 - bc^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$= \frac{a^2(b-c) - (b^2 - c^2)a + bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$= \frac{(b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$= \frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$= -1$$
$$\therefore 3^{-1} = \frac{1}{3}$$