1. $\sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = a\sqrt{2}+b$일 때, $a+b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$= \sum_{k=1}^{49} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$

$= \sum_{k=1}^{49} (\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$

$= -\left\{(\sqrt{1}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\cdots\right\}$

$+\left\{(\sqrt{49}-\sqrt{50})\right\}$

$= -(1-\sqrt{50}) = 5\sqrt{2}-1$

따라서, $a=5,\ b=-1$에서 $a+b=4$

2. $(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^k$ 일 때, k 의 값을 구하여라.(단. $a > 0, a \neq 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^6 \div a^3 \times a^2 = a^5$ 이므로
$k = 5$

3. 1이 아닌 양수 p와 세 양수 x, y, z에 대하여 $\log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z = -3$가 성립할 때, xyz의 값은?

① $\frac{1}{p^3}$ ② $\frac{1}{2p}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $2p$ ⑤ p^2

해설

$\log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z$

$= \log_p x + \frac{2}{2}\log_p y + \frac{3}{3}\log_p z$

$= \log_p xyz = -3$

$\therefore xyz = p^{-3} = \frac{1}{p^3}$

4. $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ 의 값은?

① $\frac{9}{10}$　② $\frac{11}{10}$　③ $\frac{10}{11}$　④ $\frac{20}{11}$　⑤ $\frac{11}{20}$

해설

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$$

5. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = a_n + n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$a_2 = a_1 + 1$

$a_3 = a_2 + 2$

$$\begin{array}{rl} & \vdots \\ + & a_n = a_{n-1} + (n-1) \\ \hline & a_n = a_1 + 1 + \cdots + (n-1) \\ & \quad = -1 + \dfrac{(n-1)\cdot n}{2} \end{array}$$

$\therefore a_{10} = -1 + \dfrac{9 \cdot 10}{2}$

$= -1 + 45 = 44$

6. $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{66} a_n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 120

해설

$a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$a_3 = \dfrac{2+1}{3} = 1$

$a_4 = \dfrac{1+1}{2} = 1$

$a_5 = \dfrac{1+1}{1} = 2$

$a_6 = \dfrac{2+1}{1} = 3$

$a_7 = \dfrac{3+1}{2} = 2$

$\vdots$

$\therefore\ a_1 = a_6 = a_{11} = \cdots = 3$

$a_2 = a_7 = a_{12} = \cdots = 2$

$a_3 = a_8 = a_{13} = \cdots = 1$

$a_4 = a_9 = a_{14} = \cdots = 1$

$a_5 = a_{10} = a_{15} = \cdots = 2$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{66} a_n = 13(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + a_1$

$= 13 \times 9 + 3 = 120$

7. 서로소인 두 자연수 a, b에 대하여 $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{b}{a}}$ 일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{12}}$$

따라서 $a+b=13$이다.

8. x에 관한 삼차방정식 $x^3-9x^2+23x-k=0$의 세 실근이 등차수열을 이룰 때, 상수 k의 값은?

① 9　　② 11　　③ 13　　④ 15　　⑤ 17

해설

세 근을 $a-d,\ a,\ a+d$라 하면 근과 계수의 관계에 의해

$(a-d)+a+(a+d)=3a=9 \qquad \therefore\ a=3$

$(3-d)\cdot 3+(3-d)(3+d)+3\cdot(3+d)=23$

$9-3d+9-d^2+9+3d=23$

$27-d^2=23, \quad d^2=4 \quad \therefore\ d=\pm 2$

그런데 $(3-d)\cdot 3\cdot(3+d)=k$

$3(9-d^2)=k$

$3(9-4)=k \quad \therefore\ k=15$

$a=3,\ k=15$

9. 등식 $(1+2+2^2+\cdots+2^{10})\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}\right)=(2^6-m)^2$ 을 만족하는 실수 m의 값은?

① $\frac{1}{2^4}$ ② $\frac{1}{2^5}$ ③ $\frac{1}{2^6}$ ④ $\frac{3}{2^5}$ ⑤ $\frac{3}{2^6}$

해설

$1+2+2^2+\cdots+2^{10}=\frac{2^{11}-1}{2-1}=2^{11}-1$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$\therefore\ (2^{11}-1)\left(2-\frac{1}{2^{10}}\right)$

$=(2^{11}-1)\cdot\frac{2^{11}-1}{2^{10}}=\frac{(2^{11}-1)^2}{2^{10}}$

$=\left(\frac{2^{11}-1}{2^5}\right)^2=\left(2^6-\frac{1}{2^5}\right)$

$\therefore\ m=\frac{1}{2^5}$

10. 양수 x에 대하여 $\log x$의 정수 부분을 $f(x)$, 소수 부분을 $g(x)$라 하자. 양수 a, b에 대하여 옳은 것을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $f(a^2) = 2f(a)$

ㄴ $f(a^2) + g(a^2) = 2f(a) + 2g(a)$

ㄷ $g(a) + g(b) = 1$이면 ab는 정수이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ [반례] $a = 10^{\frac{3}{2}}$ 이면 $f(a) = 1,\ f(a^2) = 3$(거짓)

ㄴ $\log a = f(a) + g(a),\ \log a^2 = 2\log a = 2f(a) + 2g(a)$
$\log a^2 = f(a^2) + g(a^2)$(참)

ㄷ [반례] $a = b = 10^{-\frac{1}{2}}$ 이면
$g(a) + g(b) = 1,\ ab = \frac{1}{10}$(거짓)